Г. ТРОФИМОВ,
кандидат экономических наук,
главный специалист Института
финансовых исследований

О РЕЖИМАХ ДОЛГОВРЕМЕННОГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА

Основной целью долговременной экономической политики российского государства должно быть обеспечение устойчивого экономического роста. Без этого невозможно гарантировать подъем уровня жизни населения, решить социальные проблемы, восстановить экономический и политический вес страны в мировом сообществе. Выделяются два главных направления государственной политики. Первое направление – институциональные реформы, нацеленные на защиту прав собственности, обеспечение справедливой конкуренции, стабильности и исполняемости законов, “прозрачности” “правил игры” и т.д. Все эти условия чрезвычайно важны для обеспечения благоприятного инвестиционного климата, необходимого для формирования производственного капитала.

Второе направление – создание условий для интенсивного накопления человеческого капитала. Это направление следует рассматривать не только в свете текущих институциональных преобразований, но и как магистральный путь долговременной государственной политики, ориентированной на устойчивый рост. Дело в том, что даже максимальных гарантий собственности, стабильности законов, “прозрачности” отношений в бизнесе и политике и т. д. недостаточно для привлечения инвестиций, коль скоро уровень квалификации трудовых ресурсов остается низким. Накопление человеческого капитала определяет в долговременной перспективе темпы увеличения физического капитала, а значит, и темпы экономического роста.

Поэтому важен вопрос о теоретической связи между динамикой человеческого капитала и инвестициями в физический капитал. Описание данной связи позволяет понять механизм экономического роста, что необходимо для оценки его долговременных темпов. По сути, этот вопрос и был главным объектом анализа как неоклассической теории роста, возникшей в 50-е годы, так и “новой” теории, появившейся во второй половине 80-х годов[1]. Однако при всем многообра-

[1] Подробный анализ неоклассических теорий роста см.: Нуреев Р. Теории развития: неоклассические модели становления рыночной экономики. – Вопросы экономики, 2000, № 5; Нуреев Р. Теории развития: новые модели экономического роста *(вклад человеческого капитала)*. – Вопросы экономики, 2000, № 9.

зии научных публикаций, особенно за последнее десятилетие, остается не вполне ясным, насколько действительно продвинулась теория в описании и объяснении механизмов роста. Таким ли уж значимым оказался прорыв “новой” теории, хотя и предложившей ряд интересных идей, но так и не отодвинувшей традиционную неоклассическую концепцию на второй план с точки зрения критериев эмпирической проверки? Ниже мы обсуждаем эти вопросы, а также предлагаем наш вариант модели экономического роста, который, как представляется, позволяет по-новому взглянуть на некоторые нерешенные проблемы.

Задачи и результаты теории экономического роста

Основные задачи теории долговременного экономического роста сформулировал Н. Калдор[2], указав на фундаментальные явления, которые она должна описать и объяснить. Во-первых, устойчивость темпов увеличения производства на душу населения. Во-вторых, устойчивость нормы доходности капитала, фондоотдачи, долей труда и капитала в доходе. В-третьих, существенный разброс темпов долговременного роста на душу населения между странами. Отсюда следует, что адекватная модель роста должна *описывать* экономику, в которой данный процесс не затухает во времени. Кроме того, такая модель должна *объяснить*, чем определяются темпы роста и макроэкономические пропорции в долговременной перспективе. Наконец, модель должна *предсказывать* качественные различия в траекториях роста, объясняющие межстрановую дифференциацию темпов роста.

Попытки использования традиционного инструментария экономической теории долгое время не были успешными. Согласно неоклассическим моделям роста (Солоу–Свана или Рамсея–Кэсса–Купманса), индивидуальное накопление капитала имеет место, если его предельный продукт остается на некотором достаточно высоком уровне. Однако из включаемых в эти модели предположений об убывающей отдаче капитала обычно следуют замедление накопления и нулевой долговременный рост[3]. Чтобы этого избежать, вводились экзогенные факторы (например, “технический прогресс”), обусловливающие не-

[2] Kaldor N. Capital Accumulation and Economic Growth. In: Proceedings of a conference held by the International Economics Association. London, Macmillan, 1963.

[3] При отсутствии экзогенного технического прогресса возможны два случая, определяемые эластичностью замещения труда и капитала. В первом, при низкой эластичности замещения (не выше 1), предельный продукт капитала снижается до нормы дисконта, и тогда накопление капитала прекращается, а экономика достигает стационарного состояния. Во втором, при высокой эластичности замещения (выше 1), предельный продукт капитала может оставаться на уровне, превышающем норму дисконта при неограниченном увеличении капитала. В этом случае накопление капитала и рост не прекращаются. Однако предположение о высокой степени взаимозаменяемости труда и капитала является ограничительным и вряд ли может служить основанием для объяснения долговременного роста. Косвенным свидетельством против высокой эластичности замены труда и капитала выступает относительно низкая доля труда в конечном доходе, характерная для бедных стран.

нулевой долговременный темп накопления капитала и роста производства. Таким образом, неоклассические модели в лучшем случае описывали, но не объясняли феномен долговременного роста.

Одной из первых попыток преодолеть этот недостаток, то есть все-таки объяснить феномен роста, стала так называемая "АК–модель" П. Ромера[4]. Она позволила рассмотреть изменения эффективности факторов, компенсирующие убывающую отдачу от капитала. Согласно АК–модели, такие изменения носят внешний характер, отражая влияние совокупного капитала в экономике на эффективность отдельного производителя. Модель Ромера давала возможность предсказывать, что из-за подобных внешних эффектов эластичность капитала в агрегированной производственной функции должна быть существенно выше его доли в конечном продукте, что не было подтверждено эмпирическими исследованиями[5].

В дальнейшем развитие теории экономического роста пошло по пути детального описания эффектов специализации производства при возрастающей отдаче от масштаба и несовершенной конкуренции в секторе исследований и разработок (ИР). Сторонники данного направления фактически отказались от рассмотрения индивидуального накопления капитала как процесса, генерирующего экономический рост. Основной акцент делался на накоплении человеческого капитала как сфере, обеспечивающей прирост знаний, технологических идей и т.д. и оказывающей разнообразные внешние воздействия на участников экономической деятельности. В моделях с сектором ИР индивиды формируют финансовые портфели для оптимального перераспределения доходов во времени, однако не этот процесс движет накоплением факторов производства и экономическим прогрессом. Рост продуктивности, качества или разнообразия продуктов обеспечивается прежде всего благодаря деятельности в секторе ИР. Чем больше размеры данного сектора, тем интенсивнее поток новых знаний и сильнее внешние эффекты накопления человеческого капитала. Результативность ИР ограничена лишь величиной квалифицированных тру-

---

[4] Romer P. Increasing Returns and Long-Run Growth. – Journal of Political Economy, 1986, vol. 94, p. 1002–1037. АК–модель – это модель, в которой предполагается постоянная отдача на агрегированный капитал. Пусть $Y=F(K,AL)$ – производственная функция репрезентативной фирмы с постоянной отдачей от масштаба, где K – капитал, L – численность занятых, A – показатель эффективности труда, пропорциональный агрегированному запасу капитала на одного занятого K'/L. Поскольку $K'=K$, агрегированный выпуск характеризуется постоянной отдачей на капитал. Первые варианты АК–модели были предложены в работах: Harrod R. An Essay in Dynamic Theory. – Economic Journal, 1939, vol. 49, p. 14–93; Domar E. Capital Expansion, Rate of Growth and Employment. – Econometrica, 1946, vol. 14, p. 137–147; Frankel M. The Production Function in Allocation and Growth: A Synthesis. – American Economic Review, 1962, vol. 52, p. 995–1022.

[5] Aghion Ph., Howitt P. Endogenous Growth Theory. Cambridge, The MIT Press, 1998, p. 32–33. Модификация модели Солоу, включающая помимо труда и физического капитала также человеческий капитал, предложенная Н. Мэнкью, Д. Ромером и Д. Уэйлом (Mankiw N., Romer D., Weil D. A Contribution to the Empirics of Economic Growth. – Quarterly Journal of Economics, 1992, vol. 107, p. 407–437), дает более правильные прогнозы, чем АК–модель. Подробнее см.: Нуреев Р. Теории развития: новые модели экономического роста *(вклад человеческого капитала)*, с. 147–151.

довых ресурсов, занятых в этом секторе. Поэтому основным уравнением, описывающим накопление знаний и динамику технического прогресса в моделях эндогенного роста с ИР, является баланс трудовых ресурсов в экономике. Рабочая сила свободно распределяется в каждом периоде времени между ИР и альтернативными областями, например, сектором промышленного производства.

Это – ключевое предположение данного направления теории эндогенного роста, которое привело к совершенно неадекватным, по нашему мнению, выводам. Как следует из ряда моделей с сектором ИР, долговременный темп роста в расчете на душу должен быть пропорционален численности трудоспособного населения[6]. Это означает, что при экспоненциальном увеличении народонаселения происходит экспоненциальное повышение темпов экономического роста. Ни в одной стране такая динамика производства не наблюдается в течение длительных периодов времени. Различные модификации моделей с сектором ИР позволили получить другой результат: темп долговременного роста в расчете на душу населения пропорционален темпу роста населения[7]. Такой вывод несколько меньше противоречит здравому смыслу и фактам, однако не позволяет объяснить, почему рост происходит и в странах со стабильной численностью населения[8]. Поэтому можно констатировать, что данное направление теории развития, хотя и имело целью объяснение реальных механизмов роста, но в итоге не смогло дать даже правильное описание этого процесса.

В одной из пионерных работ по "новой" теории роста Р. Лукас разработал оригинальный подход, основанный на предположении об индивидуальном накоплении физического и человеческого капитала[9]. В его модели учитываются внешние эффекты увеличения человеческого капитала общества, однако данный процесс является результатом распределения индивидуальных затрат времени на производство и обучение. При этом переключение с одной сферы деятельно-

[6] См., например: Romer P. Endogenous Technological Change. – Journal of Political Economy, 1990, vol. 98, p. S71–S102; Grossman G., Helpman E. Innovation and Growth in the Global Economy. Cambridge, MIT Press, 1991; Aghion Ph., Howitt P. A Model of Creative Destruction. – Econometrica, 1992, vol. 60, p. 323–351.

[7] См.: Jones Ch. R&D-Based Models of Economic Growth. – Journal of Political Economy, 1995, vol. 103, p. 759–784; Kortum S. Research, Patenting, and Technological Change. – Econometrica, 1997, vol. 65, p. 1389–1419; Segerstrom P. Endogenous Growth without Scale Effects. – American Economic Review, 1998, vol. 88, p. 1290–1310.

[8] В статье Ч. Джонса (Jones Ch. Growth: With or Without Scale Effects? – The American Economic Review, 1999, vol. 89, No 2, p. 139–144) на простых выкладках показано, как получаются подобные выводы. Пусть выпуск представительной фирмы задан производственной функцией $Y = A^{\sigma}L_Y$, где A – "запас" знаний в экономике, L_Y – численность занятых в производстве, $\sigma > 0$ – параметр. Прирост знаний выражается следующим образом: $\dot{A}/A = \delta L_A$, где L_A – численность занятых в секторе ИР, δ – параметр. Если суммарная рабочая сила в экономике равняется L и она распределяется в постоянной пропорции s между производством и ИР, то есть $L_A = \sigma L$, то темп роста производства (на душу населения) равен $g_Y = \dot{Y}/Y - \dot{L}/L = \sigma\delta sL$. В случае, когда прирост знаний характеризуется убывающей отдачей, $\dot{A} = \delta L_A A^{\phi}$, $\phi < 1$, темп роста производства составляет $g_Y = \sigma n/(1-\phi)$, где n – темп прироста численности населения.

[9] Lucas R. On the Mechanics of Economic Development. – Journal of Monetary Economics, 1988, vol. 22, p. 3–42.

сти на другую не требует никаких издержек. Анализируемые траектории роста вполне согласуются со статистическими данными для США, хотя и не дают существенного выигрыша в достоверности по сравнению с неоклассическими моделями экзогенного роста. Основной недостаток модели Лукаса состоит в том, что она не объясняет феномен дифференциации темпов роста между странами. Это, впрочем, относится и к другим моделям неоклассической и "новой" теорий роста.

Модель Лукаса, как и большинство других моделей, характеризуется *единственной* траекторией равновесного роста. Она однозначно определена при заданных начальных условиях и параметрах модели, относящихся к предпочтениям индивидов, технологии производства и процессу накопления знаний. Оставаясь в рамках таких моделей, можно объяснить дифференциацию темпов роста, только основываясь на констатации различий параметров для разных стран, что на самом деле не представляет большого интереса из-за очевидности результатов. На наш взгляд, чтобы понять механизмы развития, приводящие к разрывам в темпах роста между странами, необходимо использовать модели, выявляющие существование *различных* равновесных траекторий.

В качестве решения проблемы дифференциации темпов роста Лукас предложил в той же статье модель внешнеторговых взаимодействий, где ключевой гипотезой является не накопление капитала, а *обучение на практике (learning by doing)*. Согласно данной гипотезе, человеческий капитал увеличивается лишь благодаря опыту работы в конкретной производственной сфере. Если одна из стран имеет сравнительное преимущество в более передовом производстве, то благодаря специализации и обучению на практике она будет развивать это преимущество и в дальнейшем[10]. Другая страна вынуждена специализироваться на производстве традиционного товара, что не позволяет в той же мере использовать внешние эффекты обучения. Этим объясняется не только увеличение технологического разрыва между участвующими во внешней торговле нациями, но и сохраняющийся диспаритет в темпах экономического роста.

Идея о том, что внешняя торговля между развитыми и развивающимися странами является важным фактором дифференциации темпов роста, не нова и предлагалась в ряде более ранних и более поздних работ по проблеме неравномерного развития[11]. Однако в рамках совре-

[10] "Обучение на практике" формализовано в статье Лукаса в виде следующего предположения. Приращение специфического для некоторой сферы производства человеческого капитала пропорционально текущим затратам труда в данной сфере (Lucas R. On the Mechanics of Economic Development, p. 28). Чем выше коэффициент пропорциональности, тем более "продвинутым", в трактовке Лукаса, является конкретный сектор.

[11] См., например: Krugman P. Trade, Accumulation, and Uneven Development. – Journal of Development Economics, 1981, vol. 8, p. 149–161; Young A. Learning by Doing and the Dynamic Gains from Trade. – Quarterly Journal of Economics, 1991, vol. 106, p. 369–406; Krugman P., Venables A. Globalization and the Inequality of Nations. – Quarterly Journal of Economics, 1995, vol. 110, p. 857–880; Matsuyama K. Why Are There Rich and Poor Countries?: Symmetry-Breaking in the World Economy. NBER Working Paper, 1996, No 5697. Обзор основных работ в этой области см.: Нуреев Р. Теории развития: дискуссия о внешних факторах становления рыночной экономики *(неоклассические модели и их леворадикальная критика)*. – Вопросы экономики, 2000, № 7.

менной теории роста данная концепция оказалась, по сути, единственной, позволяющей объяснить устойчивое неравенство в динамике производства. Понятно, что разрывы в темпах развития связаны не только с внешнеторговыми отношениями стран. В рамках моделей замкнутой экономики предпринимались попытки формализовать идею "ловушки слаборазвитости", или "плохого" равновесия[12]. Эти попытки, на наш взгляд, не выдерживают критики, так как основаны на довольно шатком допущении о технологии производства, характеризующейся чередованием убывающей и возрастающей отдачи на капитал. Как отмечают Р. Барро и Кс. Сала-и-Мартин, "нам неизвестны эмпирические данные, на которых основывается гипотеза убывающей/возрастающей отдачи"[13].

В данной статье предлагается модель эндогенного роста, позволяющая дать объяснение долговременного роста и межстрановой дифференциации темпов без рассмотрения внешнеторговых взаимоотношений. Мы также не включаем в анализ всевозможные внешние эффекты, влияющие на процессы получения новых знаний и усиливающие технологическое неравенство. Как показано ниже, для объяснения феномена роста и устойчивых разрывов в развитии стран вполне достаточно модели, максимально близкой к традиционной неоклассической и основанной на гипотезе об индивидуальном накоплении физического и человеческого капитала. Важнейшая особенность нашей модели – это учет индивидуальных затрат на обучение в форме потерь полезности экономического агента. При обычных для неоклассической теории предположениях модель демонстрирует наличие двух режимов, которые мы называем режимами *интенсивного* и *экстенсивного* роста. В первом режиме индивиды затрачивают усилия на обучение, во втором – эти усилия равны нулю, причем рост обусловлен лишь экзогенными, то есть не зависящими от индивидуальных усилий факторами. В частности, как показано ниже, режим интенсивного роста не может быть реализован, если индивидуальная норма дисконта и эластичность свободного времени достаточно высоки.

Чтобы была яснее связь предлагаемой модели с неоклассической теорией, в следующем разделе мы рассмотрим ее базовый вариант, в котором рост является экзогенным. Далее мы сформулируем и проанализируем модель эндогенного роста, а затем вытекающие из нее выводы сопоставим с эмпирическими данными о долгосрочных темпах роста в различных странах.

Модель экзогенного роста

Экономика в этой модели представлена репрезентативными агентами, обладающими двумя факторами производства – физическим капи-

---

[12] Murphy K., Shleifer A., Vishny A. Industrialization and the Big Push. – Quarterly Journal of Economics, 1989, vol. 106, p. 503–530; Azariadis C., Drazen A. Threshold Externalities in Economic Development. – Quarterly Journal of Economics, 1990, vol. 105, p. 501–526; Krugman P. History versus Expectations. – Quarterly Journal of Economics, 1991, vol. 106, p. 651–667.

[13] Barro R., Sala-i-Martin X. Economic Growth. London, McGraw-Hill, 1995, p. 52.

талом и трудом. Технология описывается производственной функцией Кобба–Дугласа с нейтральным, по Харроду, техническим прогрессом:

$$Y = K^{\alpha}(hL)^{1-\alpha},$$

где: Y – суммарный выпуск, K – совокупный физический капитал, L – численность занятых, h – эффективность единицы труда, или человеческий капитал одного работника, α – "доля" капитала в доходе.

Численность занятых предполагается равной численности населения и растет с постоянным темпом n. В среднедушевом выражении данная производственная функция имеет вид: $y = k^{\alpha}h^{1-\alpha}$, то есть продуктивность работника определяется комбинацией физического и человеческого капитала, имеющихся в его распоряжении.

Агенты живут неограниченно долго и в каждый момент времени принимают решения о потреблении и инвестировании. Поэтому рассматривается задача максимизации интегральной дисконтированной полезности потребления индивида на бесконечном временнóм горизонте:

$$\max_{k,c}\int_0^{\infty} e^{-(\delta-n)t}\ln c\,dt, \qquad (1)$$

$$\dot{k} = y-(a+n)k-c, \qquad (2)$$

$$\dot{h}/h = g. \qquad (3)$$

Здесь c – текущее потребление, δ – норма дисконта, причем $\delta > n$, t – переменная времени. Текущая полезность потребления – логарифмическая функция. Интенсивность трудовых усилий фиксирована, то есть предложение труда неэластично. Агент в каждый момент времени выбирает объемы потребления и инвестирования в физический капитал, учитывая два ограничения. Первое представляет собой баланс текущих доходов и расходов и отражает процесс накопления капитала, а второе описывает экзогенный технический прогресс. Согласно (2), произведенный продукт расходуется на потребление и инвестирование. При этом инвестиции обеспечивают помимо чистого прироста капитала возмещение его выбытия с темпом a, а также позволяют увеличивать численность занятых с темпом n. Согласно (3), темп экзогенного технического прогресса постоянен и равен g.

Равновесный рост определяется как решение задачи экономического агента (1)–(3), обеспечивающее баланс его суммарных приведенных доходов и расходов, то есть удовлетворяющее стандартным условиям трансверсальности[14]. Траектории равновесного роста для данной модели удобно представить в виде двух относительных переменных: $x = c/k$ (отношение потребления к капиталу, или "норма" потребления) и $r = \partial y/\partial k = \alpha(h/k)^{1-\alpha}$ (предельная отдача на капитал). В дальнейшем мы будем также называть r валовой процентной ставкой, имея при этом в виду, что "нетто"-ставка равняется разности $r-a$. Обозначим "нетто"-дисконт $\delta - n$ как δ', а отношение $(1-\alpha)/\alpha$, отражающее структуру доходов на факторы производства, – как β.

[14] Эти условия имеют вид: $\lim_{t\to\infty}\lambda_1 k e^{-\delta' t} = 0$ *и* $\lim_{t\to\infty}\lambda_2 h e^{-\delta' t} = 0$, где λ_1 и λ_2 – сопряженные переменные или оптимальные оценки для физического и человеческого капитала соответственно (см. Приложение).

Утверждение 1. Равновесный экзогенный рост удовлетворяет системе уравнений:

$$\dot{x}/x = x - \beta r - \delta', \tag{4}$$

$$\dot{r}/r = (1-\alpha)(a+n+g+x) - \beta r. \tag{5}$$

Стационарное состояние данной системы (x^*, r^*) существует и единственно[15].

Стационарное состояние системы (4)–(5) соответствует так называемой траектории стационарного, или сбалансированного роста. На ней пропорции факторов производства сохраняются неизменными, а сами факторы увеличиваются с постоянным темпом, равным темпу экономического роста. В данном случае норма потребления и процентная ставка неизменны во времени, то есть $x = x^*$ и $r = r^*$ при всех t. При этом обеспечивается экспоненциальный рост среднедушевого производства, потребления и капитала с темпом, равным темпу технического прогресса g, и выполняются условия трансверсальности.

На рисунке 1 изображена стационарная траектория в виде точки в плоскости фазовых переменных x и r. Прямая AB на рисунке обозначает геометрическое место точек, для которых норма потребления x неизменна во времени, то есть выполняется условие: $x = \beta r + \delta'$. Аналогично, прямая CD отображает точки, для которых неизменна предельная отдача на капитал r, то есть выполняется условие: $x = r/\alpha - (a+n+g)$. Пересечением прямых AB и CD является точка $G = (x^*, r^*)$, соответствующая траектории сбалансированного роста.

Траектория равновесного экзогенного роста

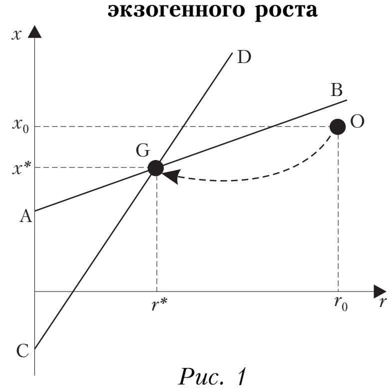

Рис. 1

Показатели стационарного экзогенного роста вычисляются в явном виде: $r^* = \alpha + \delta + g$, $x^* = \beta r^* + \delta'$. Первое соотношение означает, что нетто-процент равен сумме нормы дисконта и экзогенного темпа роста. Второе соотношение можно представить в виде функции потребления: $c = (1-\alpha)y + \delta' k$[16], согласно которой в каждом периоде полностью потребляются продукт труда и доля от стоимости капитала δ'. Заметим, что долговременная ставка процента r^* и норма потребления x^* выше при более высоком темпе технического прогресса g, норме амортизации капитала a и норме дисконта δ'.

Динамика, описываемая системой (4)–(5), основывается на взаимодействии положительной и отрицательной обратных связей. Уравнение (4) отражает положительную связь: при высокой норме потребления происходит снижение темпов роста капитала, что влечет дальнейшее увеличение нормы потребления; (5) – отрицательную обрат-

[15] Доказательства утверждений приводятся в Приложении.

[16] Соответствующая ей инвестиционная функция $i = \alpha y - \delta' k$ (i – валовые инвестиции) является частным случаем инвестиционной функции Калецкого $i = i(y,k)$. См.: Kalecki M. Essays in the Theory of Economic Fluctuations. N.Y., 1939.

ную связь: при низкой ставке процента возникает избыток физического капитала. Поэтому темп его накопления замедляется относительно человеческого капитала, что означает увеличение процентной ставки.

Стационарная траектория является равновесной только тогда, когда начальные значения физического и человеческого капитала k_0 и h_0 принимают вполне конкретные значения, так что в начальный момент времени $r_0 = r^*$ и $x_0 = x^*$. Иными словами, нужно, чтобы начальные пропорции факторов производства в точности соответствовали пропорциям стационарной траектории роста. Вряд ли можно найти серьезные основания для подобного допущения. Тем не менее траектория сбалансированного роста характеризует поведение равновесной траектории в долговременном периоде. Это вытекает из следующего утверждения.

Утверждение 2. При любом начальном значении процента r_0 существует единственная равновесная траектория, которая сходится к стационарной траектории (x^*, r^*).

Данное утверждение также проиллюстрировано на рисунке 1. Точка O соответствует комбинации начальных значений процента r_0 и нормы потребления x_0. Начальная отдача r_0 задается структурой факторов в начальный момент (отношением k_0/h_0), тогда как начальная норма потребления x_0 выбирается экономическим агентом. Траектория OG является равновесной, сходящейся к стационарной траектории. В данном случае начальная ставка процента достаточно высока, $r_0 > r^*$, поэтому равновесная траектория характеризуется снижением отдачи на капитал по мере приближения к режиму сбалансированного роста. Наоборот, при низкой начальной отдаче, когда $r_0 < r^*$, происходило бы ее увеличение.

Модель эндогенного роста

Предположим, что функция полезности экономического агента включает дополнительную переменную выбора e, отражающую интенсивность обучения, или индивидуальные усилия по повышению технологической эффективности. Эти усилия связаны с затратами времени на обучение, поиск новых знаний и другие действия, необходимые для улучшения продуктивности. Как и в модели экзогенного роста, интенсивность трудовых усилий в производстве фиксирована, то есть предложение труда неэластично. Допустим теперь, что помимо производственной деятельности индивид обладает ресурсом свободного времени, равным 1. Тогда, выбирая интенсивность обучения e, индивид оставляет себе свободное время $1-e$. Его предпочтения выражаются показателем эластичности свободного времени, равным $\theta > 0$. Смысл данного показателя состоит в том, что сокращение свободного времени на один процент должно компенсироваться увеличением потребления на θ процентов, чтобы при этом полезность осталась неизменной.

Задача экономического агента заключается в максимизации дисконтированной полезности:

$$\max \int_0^\infty e^{-\delta' t}[\ln c + \theta \ln(1-e)]dt \tag{6}$$

при бюджетном ограничении

$$\dot{k} = y - (a+n)k - c \tag{7}$$

и линейной зависимости темпа технического прогресса от интенсивности обучения e:

$$\dot{h}/h = g_0 + g_1 e. \tag{8}$$

Здесь g_0 и g_1 – параметры модели. Кроме того, переменная e принадлежит единичному интервалу:

$$0 \le e \le 1. \tag{9}$$

Параметр g_0 характеризует темп автономного технического прогресса, не связанного с индивидуальными усилиями. Если g_0 отрицательно, то происходит автономное снижение технологической эффективности (обесценение человеческого капитала). Параметр g_1 отражает предельную продуктивность усилий, поэтому мы считаем, что $g_1 > 0$. Сумма $g_0 + g_1$ характеризует максимально возможный темп роста, который реализуется при максимальной интенсивности обучения, $e = 1$.

Максимальная интенсивность обучения не может быть достигнута, поскольку в этом случае потери полезности неограниченно увеличиваются. Поэтому условие $e \le 1$ в ограничении (9) всегда выполняется в виде строгого неравенства. В зависимости от того, является ли другое условие ($e \ge 0$) связывающим, мы рассматриваем два режима экономической динамики. В первом режиме это условие выполняется как строгое неравенство, $e > 0$, то есть интенсивность обучения положительна. Во втором – $e = 0$, и данное ограничение является связывающим. Первый режим мы будем называть режимом *интенсивного* роста, а второй – *экстенсивного*, имея в виду, что в первом случае агенты затрачивают усилия на обучение, а во втором – полностью отказываются от таких усилий.

Как и выше, динамика моделируемой системы будет описываться переменными нормы потребления и ставки процента. Третьей переменной, определяющей равновесный рост, является интенсивность обучения e.

Утверждение 3. Равновесная траектория интенсивного роста удовлетворяет системе уравнений:

$$\dot{x}/x = x - \beta r - \delta', \tag{10}$$

$$\dot{r}/r = (1-\alpha)(a + n + g_0 + g_1 e + x) - \beta r, \tag{11}$$

$$\dot{e} = (1-e)(\delta' - (1-e)r/Ax), \tag{12}$$

где $A = \theta/\beta g_1$. Равновесная траектория экстенсивного роста удовлетворяет системе (4)–(5) при $g = g_0$.

Подобно модели с экзогенным техническим прогрессом, мы можем интерпретировать уравнения равновесной динамики в терминах взаимодействия отрицательных и положительных обратных связей.

Как и раньше, уравнение для нормы потребления (10) описывает положительную связь, а уравнение для процента (11) – отрицательную связь. Динамика интенсивности обучения отражает положительную связь: если эта интенсивность велика, то, как следует из (12), происходит ее дальнейшее увеличение.

Стационарные состояния для режима интенсивного роста

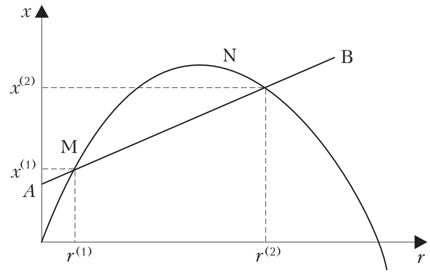

Рис. 2

Стационарные состояния системы (10)–(12) соответствуют траекториям сбалансированного роста в интенсивном режиме. На данных траекториях обеспечивается экспоненциальный рост среднедушевого производства, потребления и капитала при постоянной ставке процента r и норме потребления x. На рисунке 2 в плоскости фазовых переменных x и r отложены кривые, определяющие стационарные состояния системы (10)–(12). Как и на рисунке 1, линия AB соответствует уравнению

$$x = \beta r + \delta', \tag{13}$$

обеспечивающему неизменность нормы потребления x. Квадратичная кривая MN изображает геометрическое место точек, для которых, во-первых, постоянна интенсивность обучения, то есть удовлетворяется соотношение

$$e = 1 - \delta' Ax/r. \tag{14}$$

Во-вторых, на кривой MN постоянны процент r и норма потребления x, то есть выполняется условие

$$r = g_0 + g_1 e + \delta + a. \tag{15}$$

Таким образом, как и выше, "нетто"-процент равен сумме темпа роста и дисконта. Однако уравнение (15) еще не позволяет вычислить явное значение долговременной процентной ставки, так как существует обратное влияние процента на интенсивность обучения, которая, в свою очередь, определяет стационарный темп роста. Подставляя e из (14) в (15), получаем квадратичную функцию

$$g_1 \delta' Ax = (g_0 + g_1 + \delta + a)r - r^2, \tag{16}$$

которой соответствует кривая MN на рисунке 2.

Пересечением прямой AB и кривой MN на плоскости (x, r) являются две точки: $M = (x^{(1)}, r^{(1)})$ и $N = (x^{(2)}, r^{(2)})$, соответствующие двум стационарным состояниям системы (10)–(12). Ставки процента $r^{(1)}$ и $r^{(2)}$ вычисляются как действительные корни квадратного уравнения, которое получается при подстановке x из (13) в (16):

$$r^2 - Br + C = 0, \tag{17}$$

где: $B = a + \delta + g_0 + g_1 - \delta'\theta$, $C = (\delta')^2\theta/\beta$.

Следовательно,

$$r^{(2),(1)} = \left(B \pm \sqrt{B^2 - 4C}\right)/2.$$

Здесь $r^{(2)}$ обозначает максимальный, а $r^{(1)}$ - минимальный корень уравнения (17). Оба корня существуют, если выполнено условие: $B > 2C^{1/2}$. Таким образом, у системы (10)–(12) есть два стационарных состояния, если, во-первых, достаточно высоки темп автономного технического прогресса g_0, продуктивность обучения g_1 и норма амортизации a. Во-вторых, эластичность θ должна быть относительно невелика, то есть дополнительное уменьшение досуга связано с незначительным компенсационным увеличением потребления.

Для стационарных траекторий в интенсивном режиме темп роста выражается суммой экзогенной и эндогенной составляющих: $g_0 + g_1 e^{(i)}$, $i = 1,2$, причем интенсивность обучения рассчитывается для каждой из рассматриваемых траекторий исходя из условий (13), (14):

$$e^{(i)} = 1 - \delta' A(x/r) = 1 - \delta' A(\beta + \delta'/r^{(i)}). \tag{18}$$

Наличие стационарного состояния системы (10)–(12) еще не гарантирует существования траектории сбалансированного интенсивного роста. Для этого необходимо, чтобы условие (9) выполнялось как строгое неравенство: $e^{(i)} > 0$. С учетом (18) это означает, что, во-первых, процесс обучения достаточно продуктивен: $g_1 > \delta'\theta$, и, во-вторых, процентная ставка достаточно высока:

$$r^{(i)} > \frac{(\delta')^2 \theta}{\beta(g_1 - \delta'\theta)}.$$

Как показывают численные расчеты, проведенные для достаточно широкой области значений параметров модели (при $g_1 > \delta'\theta$), данное условие выполнено для $r^{(2)}$, но не выполнено для $r^{(1)}$. Поэтому в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением траектории интенсивного роста, соответствующей процентной ставке $r^{(2)}$. Как и в модели экзогенного роста, будем обозначать показатели данной траектории с помощью звездочки: (x^*, r^*, e^*).

Из утверждения (3) следует, что равновесная траектория в экстенсивном режиме описывается моделью экзогенного роста при $g = g_0$. Это означает, что агентами выбирается траектория, на которой интенсивность обучения нулевая. Поэтому на стационарной траектории в данном режиме темп роста равен g_0, процентная ставка – $a + \delta + g_0$, а норма потребления – $\beta(a + \delta + g_0) + \delta'$. Начальный выбор индивида в данном случае заключается лишь в определении нормы потребления на момент 0, x_0. При нулевой интенсивности обучения равновесная траектория сходится к стационарной траектории экзогенного роста, что вытекает из утверждения (2). Аналогичный результат верен и для равновесной траектории в интенсивном режиме, что показывает следующее утверждение.

Утверждение 4. При заданном начальном значении процента r_0 существует единственная равновесная траектория интенсивного роста, которая сходится к стационарной траектории (x^*, r^*, e^*).

Это утверждение иллюстрируется с помощью рисунка 3, где изображены фазовое пространство (x, r, e) и равновесная траектория роста. Соотношение факторов производства в начальный момент k_0/h_0 определяет начальный уровень процента r_0. Поэтому в начальный момент агент выбирает норму потребления x_0 и интенсивность обучения e_0, причем этот выбор ограничен плоскостью $r = r_0$. Равновесная траектория OG, достигающая стационарного состояния $G = (x^*, r^*, e^*)$, может начинаться лишь в одной точке, лежащей в данной плоскости, а именно, точке $O = (x_0, r_0, e_0)$. Таким образом, выбор равновесной траектории роста в интенсивном режиме однозначно определяется начальной ставкой процента r_0. Отображенная на рисунке 3 начальная ставка процента достаточно низка, $r_0 < r^*$, поэтому по мере приближения к режиму сбалансированного роста отдача на капитал повышается. Это результат того, что соотношение физического и человеческого капитала k/h в начальный момент достаточно велико и со временем уменьшается. Ситуация противоположная при высокой начальной отдаче на капитал, $r_0 > r^*$.

Траектория равновесного эндогенного роста

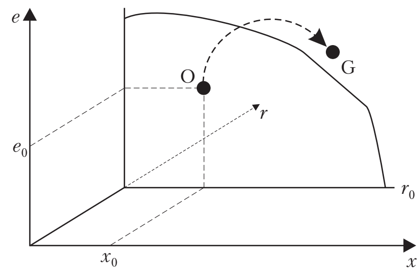

Рис. 3

При низкой норме дисконта соотношение (18) дает простую формулу для расчета долговременного темпа роста в интенсивном режиме:

$$g^* = g_0 + g_1 e^* \approx g_m - \delta'\theta. \tag{19}$$

Темп сбалансированного роста приблизительно равняется разности максимально возможного темпа роста $g_m = g_0 + g_1$ и произведения $\delta'\theta$. Чем выше либо норма дисконта, либо относительная ценность свободного времени, тем ниже долговременный темп экономического роста. Данный результат хорошо согласуется с интуитивными предположениями: темпы долговременного роста ниже, когда экономические агенты менее склонны откладывать на будущее текущее потребление или когда они высоко оценивают дополнительную единицу свободного времени. Кроме того, как видно из (19), чем выше темп роста численности населения, тем больше рост душевого дохода.

Если предположить в качестве примера, что максимально возможный темп роста равен 7%, нетто-дисконт – 2%, а эластичность свободного времени – 1,8, то темп интенсивного роста g^* составит 3,4%. Вполне реалистичные значения параметров модели дают достаточно правдоподобную оценку долговременного роста, по крайней мере, для ряда индустриально развитых стран.

Таким образом, при незначительной норме дисконта темп сбалансированного роста экономики определяется максимально допустимым темпом роста и предпочтениями индивида. Другие параметры модели, в частности, специфицирующие технологию производства, не оказывают влияния на долговременный рост. В отличие от моделей эндогенного технического прогресса с сектором ИР, о которых говорилось выше, данная модель действительно описывает стационарный рост, поскольку система агрегированных индивидуальных предпочтений достаточно стабильна. В частности, в данном случае не возникает проблем с трактовкой выводов при экспоненциальном или нулевом росте населения.

При достаточно высокой норме дисконта необходимо пользоваться точной формулой, вытекающей из соотношения (18):

$$g^* = g_m - \delta'\theta - (\delta')^2\theta / \beta r^*. \tag{20}$$

Здесь мы уже не можем пренебрегать третьим слагаемым, включающим $(\delta')^2$. Как видно из (20), чем больше долговременная предельная отдача на капитал r^*, тем выше темп роста g^*. Это означает, что меры государственной экономической политики, влияющие на повышение отдачи капитала, способны повысить и темп роста. Прежде всего, это относится к политике, стимулирующей ускоренное обновление основных фондов. Рассмотрим влияние параметра a на процентную ставку и темп роста. Поскольку r^* соответствует наибольшему корню квадратного уравнения (17), то, как нетрудно видеть, $\partial r^* / \partial B > 0$, а значит, и $\partial r^* / \partial a > 0$. В данном случае речь идет о валовой процентной ставке, поэтому вполне естественно, что с повышением величины a происходит увеличение предельной отдачи на капитал r^*, а значит, и темпа роста g^*.

Приведем числовой пример, иллюстрирующий эффект повышения нормы амортизации. Как и выше, эластичность свободного времени θ предполагается равной 1,8, но нетто-дисконт δ' будет более высоким – 3,5%. Темп прироста населения примем нулевым, так что $\delta' = \delta$. Пусть также $g_0 = 1\%$, $g_1 = 9\%$ и, следовательно, максимальный темп роста g_m равен 10%. Доля труда в доходе составляет 0,6, так что $\beta = 1{,}5$. Тогда при норме амортизации $a = 2\%$[17] темп роста экономики, рассчитанный по формуле (20), составляет 1,6%, нетто-процент равен 5,1%, а интенсивность обучения – 0,07. При более высокой норме амортизации $a = 6\%$ темп роста и интенсивность обучения оказываются заметно выше: $g^* = 2{,}5\%$, $e = 0{,}16$, а нетто-процент равен $r^* - a = 5{,}9\%$.

Стимулирование обновления капитала достигается на практике за счет налоговых льгот и системы вычетов. Поэтому для полноты описания государственной политики нам следовало бы принять к рассмотрению налоговые ставки. Но в рамках нашей модели воздействие налогов (например, подоходного либо на капитал) на долговременный темп роста g^* может проявиться только через ставку процента r^*. Отсюда следует, что при низкой норме дисконта государственная политика практически не влияет на долговременный темп экономического роста.

[17] Здесь и выше мы использовали оценки для нормы амортизации, долей факторов в производстве, эластичности свободного времени и нетто-дисконта, предлагаемые в рамках исследований реального делового цикла для американской экономики. См.: Frontiers of Business Cycle Research. Th. Cooley (ed.). Princeton University Press, 1995, p. 22. Заметим, что уровень нормы амортизации, равный 2%, не является низким, так как относится ко всему производственному капиталу, а не только к его активной части.

Дифференциация темпов роста по различным странам

Предложенная модель позволяет сделать два основных вывода. Во-первых, могут существовать два режима роста – экстенсивный и интенсивный. Во-вторых, отклонение долговременного интенсивного роста от потенциально возможного обусловлено временны́м дисконтом и эластичностью свободного времени. В отличие от режима экстенсивного роста, который может быть реализован при любых значениях параметров модели, реализация режима интенсивного роста зависит от параметров, определяющих потребительский выбор. Если предельная эффективность обучения g_1 ниже величины $\delta'\theta$, то траектории интенсивного роста не существует, так как при этом нарушается ограничение (9) на неотрицательность интенсивности обучения. В таком случае существует только равновесная траектория экстенсивного режима.

Вывод о наличии двух различных режимов роста может использоваться для объяснения свойств межстрановой дифференциации темпов роста. Чтобы продемонстрировать связь нашей модели с эмпирическими данными, допустим, что параметры потребительских предпочтений и технологии одинаковы для разных стран, но различаются показатели g_0 и g_1, отражающие темп автономного роста и эффективность системы обучения. Будем предполагать, что норма дисконта достаточно мала и поэтому для расчета темпа роста воспользуемся упрощенной формулой (19).

Для упрощения формальных выкладок также предположим, что отношение максимального и минимального темпов роста постоянно и одинаково для всех стран. Пусть минимальный темп g_0 является реализацией непрерывной случайной величины с функцией распределения $F(g_0)$. Значения g_1 также варьируют по странам, так как определяются соотношением: $g_1 = qg_0$, где $q > 1$ – коэффициент пропорциональности. Тогда, согласно (19), темп сбалансированного роста для обоих режимов можно представить в виде:

$$g^* = max[g_0,\ (1+q)g_0 - \delta'\theta].$$

Как отображено на рисунке 4(а), это кусочно-линейная функция с изломом в точке $g_0^* = \delta'\theta/q$. Данная точка является пороговым значением для g_0: при $g_0 \le g_0^*$ существует только режим экстенсивного роста, а при $g_0 > g_0^*$ реализуется режим интенсивного роста.

Графическая зависимость g^* от g_0

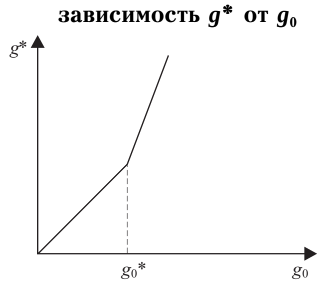

Рис. 4 (а)

Темп роста g^* также является непрерывной случайной величиной с распределением $H(g^*)$, которое связано с $F(g)$ следующим образом:

$$H(g^*) = \begin{cases} F(g^*), & \text{для } g^* \le g_0^*, \\ F[(g^* + \delta'\theta)/(1+q)] & \text{для } g^* > g_0^*. \end{cases}$$

Отсюда вытекает, что функция распределения $H(g^*)$ также имеет излом в точке g_0*, причем правая производная меньше левой. На рисунке 4(б) показана функция плотности для такого распределения. Функция $H'(g^*)$ характеризуется разрывом в точке g_0*, и при этом ее правый предел в данной точке меньше левого (поскольку левая производная функции $H(g^*)$ в точке g_0* равняется $F'(g_0^*)$, а правая производная – $F'(g_0^*)/(1+q)$).

Плотность распределения для *g**

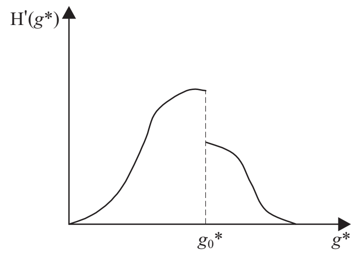

Рис. 4 (б)

Данное свойство плотности распределения обусловлено существованием двух режимов сбалансированного роста, вытекающим из нашей модели. Чтобы сравнить этот прогноз с эмпирическими данными, мы построили две гистограммы распределения долговременных темпов роста ВВП на душу населения, усредненных по годам. Одна охватывает 114 стран для периода 1960–1990 гг. (рис. 5а), другая – 93 страны и относится к периоду 1985–1999 гг. (рис. 5б)[18].

Гистограмма темпов роста

(ВВП на душу населения, в %)

1960–1990 гг.

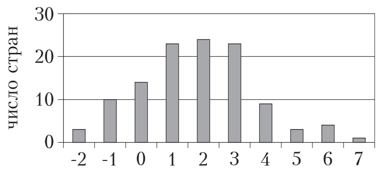

Рис. 5 (а)

1985–1999 гг.

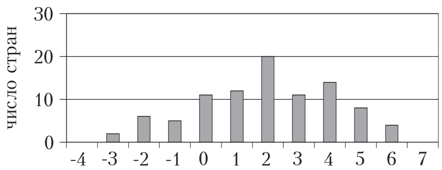

Рис. 5 (б)

Выборочные распределения темпов роста напоминают теоретическую функцию плотности: на графиках явно выделяются пороговые значения темпов роста. Согласно предложенной модели, данные пороговые значения обусловлены различными режимами развития и соответствуют излому функции распределения темпов роста $H(g^*)$. Пороговое значение для периода 1960–1990 гг. находится на уровне около 3%, а для периода 1985–1999 гг. – на уровне около 2%. Мы можем интерпретировать пороговое значение темпа роста как границу, отделяющую быстро растущие экономики от медленно растущих. Кроме того, из рисунков видно, что само пороговое значение снизилось за рассматриваемый период примерно на 1 процентный пункт, а доля быстро растущих стран после 80-х годов заметно увеличилась. Снижение порогового темпа роста можно интерпретировать как увеличение отношения максимального и минимального темпов роста, выражаемого параметром q. С содержательной точки зрения это оз-

[18] Диаграмма для первого периода воспроизводит в более агрегированной разбивке гистограмму из книги Р. Барро и Кс. Сала-и-Мартина (Barro R., Sala-i-Martin X. Economic Growth, p. 4). Диаграмма для второго периода построена на основе статистики МВФ.

начает, что в ряде стран происходило увеличение эффективности обучения относительно факторов автономного роста.

* *
*

Мы рассмотрели модель, позволяющую не только объяснить механизм сбалансированного долговременного роста, но и демонстрировать качественно различные режимы экономической динамики. Итак, для реализациия режима интенсивного роста необходимы два условия. Во-первых, экономика должна включать высокоэффективную систему обучения, то есть обладать высоким потенциалом роста. Во-вторых, поведение потребителей должно отвечать известным консервативным "ценностям": предельная полезность свободного времени или текущего потребления относительно будущего не должна быть высокой.

Нельзя с уверенностью предполагать, что данные предпосылки характерны для российской экономики и прогнозировать реализацию оптимистичного сценария для России. Будем исходить из оценки эластичности свободного времени для представительного индивида в России, по крайней мере, не ниже 2 и нормы нетто-дисконта не ниже 6–7% в год. Такие характеристики системы предпочтений должны компенсироваться чрезвычайно высокой эффективностью обучения, которой соответствует потенциальный рост с темпом не ниже 12–14%, иначе режим интенсивного роста не будет реализован, даже если государство создаст благоприятный инвестиционный климат. Поэтому важнейшим направлением долговременной экономической политики российского государства, способным стимулировать интенсивный рост, должно в ближайшие годы стать резкое повышение эффективности системы образования и переподготовки кадров.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательства утверждений

Утверждение 1

Гамильтониан для задачи экономического агента (1)–(3) имеет вид:

$$H = lnc + \lambda_1[y - c - (a+n)k] + \lambda_2 gh,$$

где λ_1, λ_2 – сопряженные переменные.

Условие первого порядка записывается как

$$1/c = \lambda_1. \tag{A1}$$

Сопряженное уравнение, соответствующее переменной k, имеет вид:

$$\dot{\lambda}_1 = \delta\lambda_1 - (r-a-n)\lambda_1. \tag{A2}$$

Из условия (A1) вытекает, что

$$\dot{\lambda}_1 = -\lambda_1 \dot{c}/c. \tag{A3}$$

Подставляя (A3) в (A2), приводим сопряженное уравнение к виду:

$$\dot{c}/c = r - a - \delta. \tag{A4}$$

Комбинируя (2) и (A4), получаем (4):

$$\dot{x}/x = \dot{c}/c - \dot{k}/k = r - a - \delta - y/k + a + n + x = x - \beta r - \delta'.$$

Аналогично, комбинируя (2) и (3), имеем:

$$\dot{h}/h - \dot{k}/k = g - r/\alpha + a + n + x.$$

Учитывая, что

$$\dot{r}/r = (1-\alpha)(\dot{h}/h - \dot{k}/k),$$

получаем (5).

Утверждение 2

Характеристическое уравнение для стационарного состояния (x^*, r^*) имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x^* - \mu & -\beta x^* \\ (1-\alpha)r^* & -\beta r^* - \mu \end{vmatrix} = 0 .$$

где μ – характеристический корень.

Он удовлетворяет квадратному уравнению:

$$\mu^2 - (x^* - \beta r^*)\mu - \beta r^* x^* + (1-\alpha)\beta r^* x^* = 0,$$

или

$$\mu^2 - \delta'\mu - \alpha\beta r^* x^* = 0.$$

Это уравнение имеет один положительный и один отрицательный корень. Поэтому стационарное состояние системы (4)–(5) является седловой точкой, а равновесная траектория – седловой траекторией. Следовательно, для любого начального значения r_0 существует единственное значение x_0, такое, что равновесная траектория сходится к стационарному состоянию (x^*, r^*).

Утверждение 3

Гамильтониан для задачи экономического агента (6)–(9) имеет вид:

$$H = lnc + \theta ln(1-e) + \lambda_1[y - c - (a+n)k] + \lambda_2(g_0+g_1e)h + \vartheta e,$$

где ϑ – двойственная оценка для левой части ограничения (9).

Для режима интенсивного роста $v = 0$, и условия первого порядка записываются как:

$$1/c = \lambda_1, \tag{A5}$$

$$\theta/(1-e) = \lambda_2 g_1 h. \tag{A6}$$

Сопряженные уравнения имеют вид:

$$\dot{\lambda}_1 = \delta\lambda_1 - (r-a)\lambda_1, \tag{A7}$$

$$\dot{\lambda}_2 = \delta'\lambda_2 - \partial y/\partial h\lambda_1 - (g_0 + g_1 e)\lambda_2. \tag{A8}$$

Из условий первого порядка (A5)–(A6) вычисляем производную по времени для сопряженных переменных:

$$\dot{\lambda}_1 = -\lambda_1\dot{c}/c, \tag{A9}$$

$$\dot{\lambda}_2 = \lambda_2\dot{e}/(1-e) - \lambda_2\dot{h}/h. \tag{A10}$$

Подставляя (A9) в (A7), приводим сопряженное уравнение (A7) к виду:

$$\dot{c}/c = r - a - \delta. \tag{A11}$$

Комбинируя (7) и (A11), получаем (10). Аналогично, комбинируя (7) и (8), получаем (11).

Подставляя (A10) в сопряженное уравнение (A8), имеем:

$$\dot{e}/(1-e) = \delta' - (\partial y/\partial h)(\lambda_1/\lambda_2). \tag{A12}$$

Нетрудно показать, что $\partial y/\partial h = \beta rk/h$. Из (A5)–(A6) следует, что

$$\lambda_1/\lambda_2 = g_1(1-e)h/\theta c.$$

Поэтому второе слагаемое правой части (A12) равняется

$$(\beta g_1/\theta)r(1-e)/x,$$

и (A12) эквивалентно (12).

Для режима экстенсивного роста выполнено условие: $e = 0$, а динамика переменных x и r определяется уравнениями (4)–(5) при $g = g_0$.

Утверждение 4

Характеристическое уравнение для стационарного состояния системы (10)–(12) имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x^*-\mu & -\beta x^* & 0 \\ (1-\alpha)r^* & -\beta r^*-\mu & (1-\alpha)g_1 \\ (1-e^*)\delta'/x^* & (1-e^*)\delta'/r^* & \delta'-\mu \end{vmatrix} = 0,$$

где μ – характеристический корень.

Это уравнение является кубическим:

$$-\mu^3 + 2\delta'\mu^2 + A_1\mu - B_1 = 0, \tag{A13}$$

где: $A_1 = (1-\alpha)[x^*r^* + g_1(1-e^*)\delta'/r^*] - (\delta')^2$,

$B_1 = \delta'(1-\alpha)[x^*r^* + g_1(1-e^*)(x^*/r^* + \beta)]$.

Коэффициент A_1 положителен, так как $x^*r^* = \beta(r^*)^2 + \delta' r^* > (\delta')^2$. Поскольку оба коэффициента A_1 и B_1 положительны, уравнение (A13) имеет только один отрицательный корень. Поэтому равновесная траектория является седловой, а значит, единственной сходящейся к стационарному состоянию (x^*, r^*, e^*) для заданного начального значения r_0.