Норма полезности запасов и волатильность сырьевых цен

Трофимов Г. Ю.*

(Институт Финансовых Исследований, г. Москва)

Май 2020 г.

Рассматривается модель сырьевого рынка с участниками, действующими на стороне спроса и получающими выигрыш от использования товарных запасов. Источником флуктуации цены товара в модели являются случайные возмущения предложения товара. Равновесная динамика рынка описывается стохастическими разностными уравнениями для цены и нормы полезности запаса. Как показано, управление запасами вносит вклад в автокорреляцию товарной цены. Демонстрируются варианты поведения участников, стабилизирующие и дестабилизирующие ценовую динамику. В первом случае изменения запасов сглаживают ценовые колебания, а во втором – усиливают.

1. Введение

Сырьевые рынки охватывают продукцию добывающих отраслей, сельского хозяйства, металлургии и химической промышленности. Особенностью представленных на этих рынках товаров является их двойная природа. С одной стороны, они являются предметами промежуточного или конечного потребления. С другой стороны, каждый из них может служить реальным активом, однородным по физическим свойствам и сохраняющим ценность при хранении в виде запасов. В качестве реальных активов сырьевые товары являются предметом межвременной торговли: отложенная в запас единица товара через какое-то время вновь предлагается на рынке. При этом решения об изменении товарных запасов согласуются через ценовой механизм с динамикой спроса и предложения.

Помимо сохранения ценности товарные запасы могут приносить определенный потребительский выигрыш их владельцам. Во-первых, они выполняют функцию буфера,

* Автор признателен А. Б. Поманскому за полезные замечания.

сглаживающего объемы потребления при колебаниях рыночных цен. Во-вторых, запасы позволяют нивелировать потери из-за прерываний поставок или непредвиденных скачков спроса, диктующих необходимость экстренной доставки необходимых товаров. В-третьих, товарные запасы обеспечивают экономию на основе рационализации логистических процессов.

В данной статье предлагается теоретическая модель сырьевого рынка, учитывающая взаимосвязь цен товарного потока и товарного запаса. Основным предположением данной модели является то, что участники рынка выигрывают от создания запасов благодаря их двоякому свойству: сохранения ценности и полезности хранения. На основе модели изучается вопрос о влиянии торговли с использованием запасов на волатильность цены сырьевого товара с учетом того факта, что на многопериодном временном горизонте эта волатильность усиливается из-за положительной автокорреляции цен. Рассматривается взаимосвязь спекулятивного и потребительского мотивов в управлении запасами и исследуется вопрос о том, каким образом спекулятивный мотив может увеличивать автокорреляцию сырьевых цен и оказывать дестабилизирующий эффект на их динамику.

Предложение товара в модели является экзогенной переменной, в отличие от моделей управления запасами с производством, исследованных, например, в работах: Michael Brenan (1958), Jeffrey Williams (1986) и Robert Pindyck (1994, 2004). В этих работах предполагалось, что решения о запасах принимают участники, действующие на стороне предложения. Например, в нефтяной отрасли такими участниками являются добывающие компании, которые определяют, сколько нефти поместить в хранилища, а сколько выставить на продажу.

Решения об изменении запасов в нашей модели принимают экономические агенты, действующие на стороне спроса и являющиеся потребителями сырьевого товара. В случае нефтяного рынка к этой группе относятся компании, функционирующие на разных этапах переработки и потребления нефтепродуктов, включая конечное потребление. Участниками сырьевых рынков на стороне спроса являются также торговые фирмы, создающие товарные запасы с целью получения спекулятивной прибыли. Для упрощения постановки модели предполагается, что участники рынка, которые называются «потребителями», являются однородными, но имеют мотивацию двоякого рода. Они выбирают в каждом периоде времени уровень потребления товара и величину запаса исходя из мотивов полезности хранения и спекулятивного выигрыша за счет межвременной ценовой маржи. На основе такого выбора рынок устанавливает равновесные цены товара и товарного запаса.

Флуктуации этих цен в модели обусловлены случайным процессом для предложения товара, являющимся линейной авторегрессией первого порядка. Она характеризуется положительной автокорреляцией предложения, отражающей в упрощенной форме эффекты последействия. В реальности, внешние события, влияющие на сырьевые рынки, обладают подобным свойством. Примером отрицательного шока предложения со значительным эффектом последействия может быть нарушение поставок нефти на мировой рынок, вызванное политическими потрясениями в той или иной стране-экспортере. Положительным шоком с аналогичным эффектом является открытие большого месторождения нефти, которое может оказывать влияние на объемы предложения в течение многих лет.

Как показывает анализ модели, управление запасами вносит вклад в автокорреляцию сырьевых цен в дополнение к влиянию шоков предложения. В отсутствии запасов, автокорреляция цен полностью объяснялась бы воздействием этих шоков. Вклад запасов в автокорреляцию цен обусловлен межвременной связью, которая возникает благодаря управлению запасами. Потребители распределяет имеющийся в распоряжении товар между потреблением и пополнением запаса. При этом единица товара, отложенная в запасе, воздействует на предложение товара и цены в будущие периоды, аналогично эффекту автокорреляции случайных шоков предложения. Таким образом, автокорреляция цен, существующая из-за автокорреляции предложения, усиливается благодаря управлению запасами.

Следует отметить, что ни в одной из упомянутых выше работ, использующих модели рынка с запасами на стороне производства, не было найдено в явном виде формальное решение для поставленных задач. Их анализ в основном ограничивается рассмотрением графиков спроса и предложения или обсуждением условий первого порядка. На основе такого анализа делаются содержательные выводы и дается эконометрическая оценка параметров моделей. Отличие нашей модели в том, что она допускает более глубокое формальное исследование, позволяющее получить ответы на поставленные выше вопросы.

Используя предположение о стационарности случайного процесса предложения, мы находим приближенное решение для цены товара и *нормы полезности запаса*, которая определяется как отношение выигрыша от хранения к спотовой цене товара.[1] Норма полезности запаса аналогична относительной цене запаса в упомянутых выше моделях с производством. Приближенное решение для управления запасами в нашей модели определяется в каждом периоде времени как сумма двух слагаемых: эффекта накопления запасов, отражающего вклад отложенного предложения, и эффекта условий торговли, отражающего влияние нормы полезности, т.е. относительной ценности запаса.

Управление запасами в нашей модели влияет на волатильность цен, поскольку оно может усиливать или смягчать влияние флуктуаций предложения на цены. Модель допускает варианты управления запасами, стабилизирующего или дестабилизирующего динамику цен товаров. Например, запасы могут частично абсорбировать отрицательный шок предложения, если в ответ на этот шок они снижаются в большей степени чем потребление товара. В такой ситуации эффект шока на увеличение текущей цены смягчается благодаря сокращению запасов. В противном случае управление запасами дестабилизирует цену товара, так как усиливает эффект ценового скачка, вызванного отрицательным шоком предложения.

Как будет показано, характер влияния запасов на ценовую волатильность отражается в изменениях нормы полезности запаса. Управление запасами является стабилизирующим цены, если изменение нормы полезности сонаправлено с текущей ценой товара: например, эта норма увеличивается в ответ на отрицательный шок предложения. Напротив, управление запасами дестабилизирует цены, если норма полезности уменьшается в ответ на отрицательный шок, поскольку реагирует в большей мере на изменение ценовых ожиданий, чем на изменение текущей цены товара.

2. Бэквардация и выигрыш от хранения товаров

Прежде чем перейти к рассмотрению модели, необходимо коснуться эмпирического содержания, отражаемого понятием выигрыша от хранения товаров или «выигрыша от удобства» (в буквальном переводе термина *the convenience yield*). Данный термин был введен Николасом Калдором (Kaldor, 1939) и использовался для объяснения феномена бэквардации, обозначающего положительный спрэд между спотовой и фьючерсной ценой товара. Бэквардация в сильной форме означает ситуацию на рынке,

[1] В англоязычной литературе это понятие выражается труднопереводимым термином *the percentage net basis*, коль скоро речь идет о чистом выигрыше за вычетом издержек хранения.

когда фьючерсная цена ниже спотовой на ту же дату. Бэквардация в слабой форме означает такое же условие для дисконтированной фьючерсной цены.

Выигрыш от хранения товара связан со спрэдом спотовой и фьючерсной цены следующим образом. Пусть $f_{t,t+1}$ обозначает цену однопериодного фьючерсного контракта в периоде t, p_t – спотовую цену в том же периоде, D_t – выигрыш от хранения единицы товара в течение одного периода, а z_t – удельные издержки хранения. Предположим, что участник рынка выбирает длинную позицию для единицы товара, которая, во-первых, финансируется за счет кредита по безрисковой ставке r_0 и, во-вторых, полностью хеджируется короткой позицией по фьючерсу. Тогда рисковая доходность за один период составит по длинной позиции $D_t - z_t + p_{t+1} - p_t$, а по короткой $f_{t,t+1} - f_{t+1,t+1} = f_{t,t+1} - p_{t+1}$, при этом в периоде t значение цены p_{t+1} неизвестно. Приравнивая суммарную гарантированную доходность $D_t - z_t + f_{t,t+1} - p_t$ к стоимости кредита $r_0 p_t$, получаем, что чистый выигрыш от хранения товара равен спот-фьючерсному ценовому спрэду:

$$D_t - z_t = (1 + r_0)p_t - f_{t,t+1} \quad . \qquad (0)$$

Выигрыш является положительным, если выполнено условие бэквардации в слабой форме:

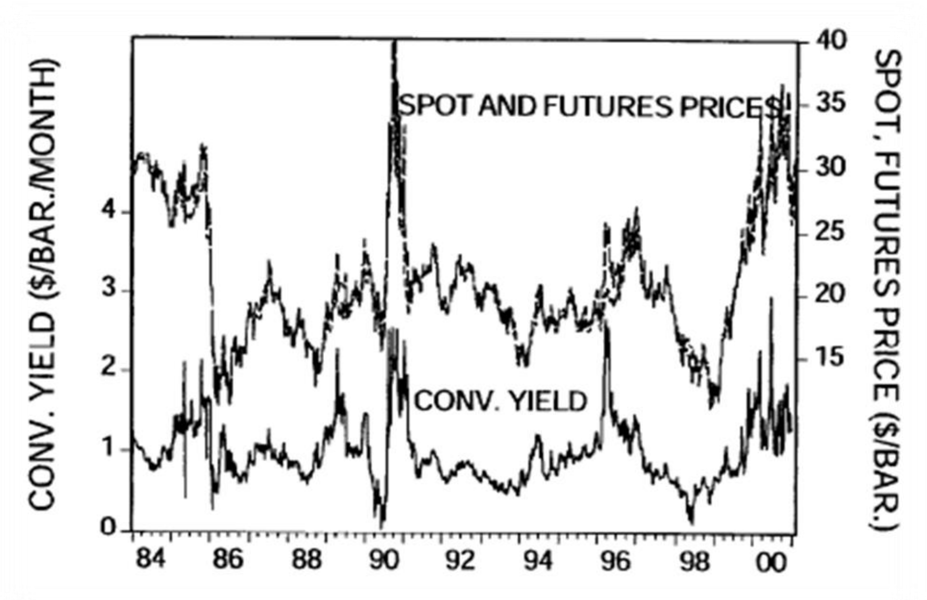
$$p_t > f_{t,t+1}/(1 + r_0) \, .$$

Бэквардация в слабой либо сильной форме устойчиво присутствует на многих сырьевых рынках. Например, на рынке сырой нефти слабая бэквардация имела место в 94 процентах календарных дат, а сильная в 77 процентах за период между февралем 1984 г. и апрелем 1992 г. (Litzenberger & Rabinowitz, 1995). Для более широкого временного горизонта 1998- 2008 г. условие слабой бэквардации нарушалось лишь в трех коротких эпизодах в 1993–1994, 1998 и 2005–2006 г. (Lautier, 2009).

Устойчивость разрыва между спотовой и фьючерсной ценами товаров можно объяснить выгодой от обладания товарными запасами, превышающей издержки хранения. Эмпирические данные свидетельствуют, что выигрыш от хранения, выраженный как спрэд этих цен, следует рассматривать в качестве стохастической переменной. На рис. 1 представлены графики для спотовой цены нефти, цены трехмесячного фьючерса, а также величины выигрыша от хранения в период 1984–2000. Рисунок демонстрирует устойчивость бэквардации, стохастический характер выигрыша от хранения, а также явную положительную корреляцию между этим выигрышем и спотовой ценой.

Норма полезности запаса, определенная выше как отношение выигрыша от хранения к спотовой цене товара, также является случайной величиной, что подтвердили Райна Гибсон и Эдуардо Шварц (Gibson & Schwartz, 1989), отвергнув гипотезу полной корреляции между спот-фьючерсным спрэдом и спотовой ценой нефти. Эти авторы (1990), а также Шварц (Schwartz, 1997) исследовали двумерные векторные авторегрессии для спотовой цены и нормы полезности запаса для ряда сырьевых товаров и выявили тенденцию возвращения к среднему в динамике нормы полезности.

Рис. 1: Спотовая и фьючерсная цены и выигрыш от хранения нефти



Reproduced from: Pindyck R. (2001, p. 21)

Рассматриваемая ниже модель сырьевого рынка с запасами опирается на эти эмпирические результаты. Как будет показано, равновесный выигрыш от хранения единицы товара отражается спот-фьючерсным спрэдом. При этом в модели не рассматривается фьючерсный рынок, так как в этом нет необходимости. В реальности данные рынки обеспечивают распределение рисков между различными группами участников и выявляют информацию об их ожиданиях. Однако фьючерсные контракты в подавляющем большинстве случаев (99% для рынка сырой нефти) не предполагают доставку товаров покупателям, а значит напрямую не влияют на баланс спроса и предложения на спотовом рынке (Smith, 2009). Влияние может быть косвенным через формирование рыночных ожиданий, которые важны для управления запасами. В свою очередь, решения об изменении запасов воздействуют на спрос и предложение, а значит на уровень и динамику товарных цен.

3. Модель сырьевого рынка с запасами

Рассмотрим проблему выбора потребления сырьевого товара и формирования запаса, которую решает «потребитель» – участник сырьевого рынка на стороне спроса, имеющий в распоряжении мощности для хранения товара. Производство в модели отсутствует, а предложение товара неэластично к цене. Потребители однородны, их число постоянно и нормировано к единице. В каждый период времени потребитель выбирает комбинацию потребления и запаса, максимизируя приведенную стоимость потребительского излишка на бесконечном временном горизонте:

$$U = E_0 \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t \big(u(y_t, s_t) - p_t(y_t + i_t) \big) \tag{1}$$

при ограничении

$$s_t = s_{t-1} + i_t \tag{2}$$

где $\beta = 1/(1+r)$ это дисконтирующий множитель, $r \geq r_0$ – норма дисконта, y_t – потребление товара в периоде t, $s_t \geq 0$ – запас товара к концу периода t, i_t – переменная пополнения запаса в течение этого периода, которая может быть положительной или отрицательной. Однопериодная денежная полезность $u(y_t, s_t)$ является функцией потребления и величины запаса. Потребительский излишек в (1) равен полезности за вычетом расходов периода t на потребление и пополнение запасов, $p_t(y_t + i_t)$. Ограничение (2) является балансовым уравнением для изменения запаса (начальный запас s_0 задан экзогенно). Емкость запаса не ограничена, а стоимость хранения равна нулю, то есть $z_t = 0$.

Полезность $u(y_t, s_t)$ является возрастающей по обоим аргументам, вогнутой и непрерывно дифференцируемой функцией, удовлетворяющей условию Инады: $\partial u(y_t, 0)/\partial s_t = \infty$ для любого $y_t > 0$. Это условие гарантирует невозможность полного исчерпания запаса в силу того, что его предельная полезность неограниченно возрастает по мере приближения запаса к нулю. В дальнейшем будет использоваться следующий вид функции полезности:

$$u(y_t, s_t) = \frac{y_t^{1-\theta} + bs_t^{1-\theta} - (1+b)}{1-\theta} \tag{3}$$

где $\theta > 0$ – обратная эластичность спроса, $b \geq 0$ – весовой коэффициент запаса в полезности. Слагаемое $(1+b)$ в знаменателе (3) необходимо, чтобы включить в рассмотрение полезность Кобба-Дугласа с $\theta = 1$.

Предложение товара выражается случайной переменной x_t, которая задана авторегрессией первого порядка:

$$ln x_t = \alpha ln x_{t-1} + \varepsilon_t \tag{4}$$

где α это коэффициент авторегрессии, $0 \leq \alpha < 1$, ε_t – независимые случайные переменные с нулевым средним и дисперсией σ^2, отражающие шоки на стороне предложения. Процесс (4) характеризуется свойством возвращения к долговременному среднему $x^* = 1$.

Условие рыночного равновесия имеет вид:

$$y_t + i_t = x_t \tag{5}$$

Иначе говоря, в каждом периоде сумма потребления и пополнения запаса равна предложению товара.

4. Норма полезности запаса

Запишем Лагранжиан для задачи потребителя (1)-(2):

$$\mathcal{L} = E_0 \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t \big(u(y_t, s_t) - p_t(y_t + i_t) + v_t(s_{t-1} + i_t - s_t)\big), \tag{6}$$

где v_t это двойственная оценка для баланса запасов (2). Условия первого порядка для переменных y_t и i_t имеют вид:

$$\partial u_t / \partial y_t = p_t\ , \tag{7}$$

$$p_t = v_t\ , \tag{8}$$

где $\partial u_t / \partial y_t$ обозначает $\partial u(y_t, s_t) / \partial y_t$. Цена товара равна предельной полезности потребления и совпадает с двойственной оценкой запаса. Выпишем условие первого порядка для s_t:

$$v_t = \partial u_t/\partial s_t + \beta E_t v_{t+1}\ . \qquad (9)$$

Заменяя v_t на p_t в (9), получаем уравнение для цены товара:

$$p_t = \partial u_t/\partial s_t + \beta E_t p_{t+1}\ . \qquad (10)$$

Предельная полезность запаса $\partial u_t/\partial s_t$ определяет выигрыш от хранения единицы товара в периоде t. Цена товара (10) является суммой этого выигрыша и дисконтированной ожидаемой цены в следующем периоде.

Для функции полезности (3) имеем: $\partial u_t/\partial y_t = y_t^{-\theta}$, следовательно из (7), функция спроса на товар имеет вид:

$$y_t = p_t^{-1/\theta}. \qquad (11)$$

Предельный выигрыш от хранения увеличивается с уменьшением запаса, $\partial u_t/\partial s_t = b s_t^{-\theta}$, и стремится к бесконечности, если s_t приближается к нулю.

Определим норму полезности запаса как отношение:

$$\delta_t = \frac{\partial u_t/\partial s_t}{\partial u_t/\partial y_t} \qquad (12)$$

Эта норма имеет размерность “1/время”, поскольку является ценой запаса, измеренной в единицах товарного потока. Для полезности вида (3), она является степенной функцией отношения потребления к запасу:

$$\delta_t = b(y_t/s_t)^{\theta}. \qquad (13)$$

Поскольку $\partial u_t/\partial y_t = p_t$, уравнение цены (10) может быть приближенно записано как $E_t p_{t+1} = (1+r)(1-\delta_t)p_t \approx (1+r-\delta_t)p_t$ при достаточно малых значениях r и δ_t. Таким образом, ожидаемый ценовой выигрыш от хранения запаса в течение одного периода равен норме дисконта за вычетом нормы полезности запаса:

$$E_t \Delta p_{t+1}/p_t = r - \delta_t \qquad (14)$$

Уравнение (14) представляет собой условие равновесия для межвременного распределения сырьевого товара аналогичное стохастическому правилу Хотеллинга для ресурсных цен.

4.1 Норма дисконта

Норма дисконта r является экзогенной величиной, которая может превышать безрисковую процентную ставку r_0. Проясним экономический смысл этой нормы. Согласно уравнению (14), r представляет собой ожидаемую доходность для рисковой длинной позиции на единицу товара, равную сумме выигрышей от ожидаемого прироста цены и хранения: $rp_t = E_t \Delta p_{t+1} + p_t \delta_t$. При этом условие гарантированного выигрыша от хранения (0) принимает вид: $p_t \delta_t = (1 + r_0) p_t - f_{t,t+1}$. Оно согласуется с уравнением (14), если фьючерсная цена товара равна ожидаемой спотовой минус премия за риск:

$$f_{t,t+1} = E_t p_{t+1} - (r - r_0) p_t. \tag{15}$$

Разность $r - r_0$, является премией за риск на единицу финансовых вложений, а фьючерсная цена совпадает с ожидаемой спотовой, только если $r = r_0$, то есть премией за риск можно пренебречь. Роберт Пиндайк предложил рассчитывать данную премию, используя коэффициенты «бета» из модели капитальных активов CAPM, соответствующие инвестиционным позициям по сырьевым товарам (Pindyck 2001, p.18).

5. Динамика рынка с запасами

Используя линейное приближение $E_t \Delta p_{t+1} / p_t \approx E_t \Delta ln p_{t+1}$, уравнение цены (14) можно представить в виде

$$E_t \Delta ln p_{t+1} = r - \delta_t \tag{16}$$

В каждый период времени происходит изменение запасов, благодаря которому обеспечивается совместимость уравнение (16) с условием баланса спроса и предложения (5), которое можно представить так:

$$ln p_t = -\theta ln(x_t - i_t) \tag{17}$$

поскольку $p_t^{-1/\theta} = x_t - i_t$. Правая часть неявно зависит от цены, так как включает переменную пополнения запасов i_t. Наша задача в том, чтобы найти решение для управления запасами, которое даст решение для цены в явном виде.

5.1 Доступный ресурс

Введем в рассмотрение переменную $a_t = s_{t-1} + x_t$, которую будем называть *доступным ресурсом* (в английском варианте – *current availability*). Она определяется как сумма запаса к концу периода $t-1$ и предложения в периоде t. Джеффри Уильямс и Брайн Райт (Williams &Wright 1991, p. 28), а также другие авторы использовали эту переменную для анализа моделей сырьевых рынков с запасами.

В нашей модели доступный ресурс является переменной состояния рынка, на основе которой потребители в каждом периоде принимают решения. Доступный ресурс используется на потребление периоде t и формирование запаса к концу этого периода. Пропорция распределения определяется нормой полезности δ_t, поскольку из (13) вытекает пропорциональная связь потребления и запаса:

$$y_t = s_t(\delta_t/b)^{1/\theta} \tag{18}$$

Из балансовых уравнений для запаса (2) и спроса-предложения (5) следует, что сумма потребления и запаса к концу периода t равна доступному ресурсу к началу следующего периода,

$$y_t + s_t = a_t \tag{19}$$

Комбинируя это уравнение с (18), получаем неявное решение в рекурсивной форме:

$$s_t = \mu_t a_t \tag{20}$$

$$y_t = (1-\mu_t)a_t \tag{21}$$

где

$$\mu_t = \frac{b^{1/\theta}}{b^{1/\theta} + \delta_t^{1/\theta}}$$

доля запаса в доступном ресурсе. Она увеличивается с весом запаса в полезности b и уменьшается с δ_t.

5.2 Стационарный режим

Решение в явном виде можно получить для стационарного случайного процесса предложения, для которого начальным временем является минус бесконечность. Итерируя авторегрессионное уравнение (4), получаем логарифм предложения в виде скользящего среднего бесконечного порядка:

$$lnx_t = \sum_{\tau=0}^{\infty} \alpha^{\tau} \varepsilon_{t-\tau} \quad (22)$$

Приближенное решение будет строиться на основе линеаризации уравнений модели в окрестности точки долговременного равновесия, соответствующей долговременному среднему для предложения $x^* = 1$.

В состоянии долговременного равновесия выполнено условие $E_t \Delta lnp_{t+1} = 0$, поэтому из ценового уравнения (16) следует, что долговременная норма полезности запаса равна норме дисконта,

$$\delta^* = r. \quad (23)$$

Кроме того, в долговременном равновесии запасы не пополняются, $i_t = 0$. Поэтому из условий баланса запасов (2) и спроса-предложения (5) с учетом функций товарного спроса (11) и нормы полезности (13) получаем долговременные равновесные значения переменных модели: $y^* = 1$, $p^* = 1$, $s^* = (b/r)^{1/\theta}$. Долговременное равновесие соответствует стационарному состоянию в детерминистской постановке модели, для которой случайные возмущения предложения ε_t равны нулю для всех t.

5.3 Решение для управления запасами

Чтобы найти решение для запасов, введем дополнительную переменную q_t, которая задана в виде авторегрессии:

$$lnq_t = \mu lnq_{t-1} + \varepsilon_t \quad (24)$$

с коэффициентом авторегрессии равным

$$\mu = \frac{b^{1/\theta}}{b^{1/\theta} + r^{1/\theta}}.$$

Это доля запаса в доступном ресурсе, соответствующая стационарному значению нормы полезности $\delta^* = r$. В дальнейшем будем называть коэффициент μ *склонностью к хранению* товара.

Процесс (24) строится на тех же случайных шоках ε_t, что и процесс для предложения товара (4), но отличается коэффициентом авторегрессии μ. Переменная lnq_t является скользящим средним бесконечного порядка для шоков предложения:

$$lnq_t = \sum_{\tau=0}^{\infty} \mu^{\tau} \varepsilon_{t-\tau} \tag{25}$$

Это сумма текущего и всех прошлых шоков предложения $\varepsilon_{t-\tau}$, которые остаются в хранении к концу периода t. Поэтому будем называть lnq_t *отложенным избыточным предложением*, а lnx_t – *текущим избыточным предложением*. «Избыточность» означает отклонение предложения от долговременного среднего $x^* = 1$.

В следующем утверждении формулируется правило оптимального управления запасом в зависимости от этих переменных и нормы полезности.

Утверждение.1. Предположим, что $\mu \neq \alpha$. Тогда запас к концу периода t равен

$$s_t = s^* + \mu \frac{\mu lnq_t - \alpha lnx_t}{\mu - \alpha} - \left(\frac{\mu}{\theta r}\right)(\delta_t - r) \tag{26}$$

Доказательство: Приложение А.

Согласно выражению (26), отклонение запаса от долговременного среднего значения $s^* = (b/r)^{1/\theta}$ является суммой двух слагаемых. Первое отражает *эффект накопления запаса*, второе – *эффект условий торговли*. Первое пропорционально взвешенной разности отложенного и текущего избыточного предложения, $\mu lnq_t - \alpha lnx_t$. Второе показывает, что чем больше разность нормы полезности запаса и нормы дисконта, $\delta_t - r$, т. е. отклонение δ_t вверх от долговременного среднего значения, тем меньше объем запаса.

Чтобы прояснить смысл слагаемого в (26), отражающего эффект накопления запаса, имеет смысл обратиться к формальным выкладкам из доказательства утверждения 1. Используя линейные приближения для текущего и отложенного предложения:

$$x_t \approx 1 + \sum_{\tau=0}^{\infty} \alpha^{\tau} \varepsilon_{t-\tau}, \quad q_t \approx 1 + \sum_{\tau=0}^{\infty} \mu^{\tau} \varepsilon_{t-\tau}\ , \tag{27}$$

рассмотрим шок предложения в периоде $t - \tau$ и его влияние на накопление запаса к периоду t включительно. Допустим, что $\varepsilon_{t-\tau} > 0$. При отсутствии эффекта условий торговли имеем $\mu_t = \mu$. Это значит, что часть величины $\varepsilon_{t-\tau}$, сохраненная в период $t - \tau$, равна $\mu\varepsilon_{t-\tau}$, а часть, остающаяся в запасе к концу периода t, равна $\mu^{\tau+1}\varepsilon_{t-\tau}$. Вклад шока $\varepsilon_{t-\tau}$ в текущее предложение следующего периода $t-\tau+1$ составляет $\alpha\varepsilon_{t-\tau}$, а доля этого вклада, сохраненная в запасе к периоду t равна $\mu^{\tau}\alpha\varepsilon_{t-\tau}$. Продолжая аналогичным образом, получаем вклад $\varepsilon_{t-\tau}$ в текущее предложение периода $t-1$, сохраненный в запасе в периоде t: $\mu\alpha^{\tau}\varepsilon_{t-\tau}$. Суммируя все эти слагаемые во времени от $t-\tau$ до t, получаем суммарный вклад шока предложения $\varepsilon_{t-\tau}$ в накопление запаса в периоде t:

$$\Delta_{t,t-\tau} = \mu(\mu^{\tau} + \mu^{\tau-1}\alpha + \cdots + \mu\alpha^{\tau-1} + \alpha^{\tau})\varepsilon_{t-\tau} = \mu^{\tau+1}(1 + (\alpha/\mu) + \cdots + (\alpha/\mu)^{\tau})\varepsilon_{t-\tau}$$

$$= \mu^{\tau+1}\frac{1-(\alpha/\mu)^{\tau+1}}{1-\alpha/\mu}\varepsilon_{t-\tau} = \frac{\mu}{\mu-\alpha}(\mu^{\tau+1} - \alpha^{\tau+1})\varepsilon_{t-\tau} \qquad (28)$$

при условии, что $\alpha < \mu$. Для $\varepsilon_{t-\tau} < 0$ эта формула выражает вклад отрицательного шока периода $t-\tau$ в сокращение запаса в периоде t.

Суммируя величины $\Delta_{t,t-\tau}$ по всем $\tau \geq 0$, получаем общий вклад всех шоков предложения, реализованных к периоду t включительно, в запас к концу этого периода:

$$\sum_{\tau=0}^{\infty}\Delta_{t,t-\tau} = \frac{\mu}{\mu-\alpha}\left(\mu\sum_{\tau=0}^{\infty}\mu^{\tau}\varepsilon_{t-\tau} - \alpha\sum_{\tau=0}^{\infty}\alpha^{\tau}\varepsilon_{t-\tau}\right) = \frac{\mu}{\mu-\alpha}\,(\mu ln q_t - \alpha ln x_t) \qquad (29)$$

Таким образом, мы вывели слагаемое, присутствующее в правиле оптимального управления (26) и соответствующее эффекту накопления запаса. Результат не изменится для случая $\alpha > \mu$, что показано в доказательстве утверждения 1.

В этом доказательстве также используется тот факт, что эффект накопления выражается как разность суммарного предложения в настоящем и прошлом, сохраненного в запасах к концу периода t, и долговременной величины запасов s^*:

$$\frac{\mu}{\mu-\alpha}\,(\mu ln q_t - \alpha ln x_t) = \mu\sum_{\tau=0}^{\infty}\mu^{\tau}x_{t-\tau} - s^* \qquad (30)$$

Преимущество решения в виде (26) в том, что оно зависит только от текущих значений переменных q_t и x_t. Это обстоятельство существенно упрощает дальнейший анализ.

6. Решение для нормы полезности запаса и цены товара

Доказательство утверждения 1 содержит решение для потребления, которое аналогично решению для запаса (26):

$$y_t = 1 + (1-\mu)\frac{\mu lnq_t - \alpha lnx_t}{\mu - \alpha} + (\mu/\theta)\tilde{\delta}_t \, , \tag{31}$$

где $\tilde{\delta}_t = (\delta_t - r)/r$ обозначает относительную разность нормы полезности и нормы дисконта. Отклонение потребления от долговременного среднего $y^* = 1$ равно сумме слагаемых, относящихся к эффектам накопления и условий торговли. Влияние последнего на потребление противоположно влиянию на величину запаса в (26).

Подставляя (31) в (17), получаем уравнение для цены равновесия:

$$lnp_t = \theta(1-\mu)\frac{\mu lnq_t - \alpha lnx_t}{\alpha - \mu} - \mu\tilde{\delta}_t \, . \tag{32}$$

Равновесная цена должна удовлетворять двум условиям: уравнению (32), обеспечивающему баланс спроса и предложения, и уравнению (16) для ожидаемого темпа роста цены, вытекающего из межвременного распределения запаса. Совместимость этих условий обеспечивается равновесной нормой полезности запаса.

Утверждение 2. Равновесная норма полезности запаса выражается в виде:

$$\tilde{\delta}_t = \lambda_q lnq_t + \lambda_x lnx_t \, , \tag{33}$$

где

$$\lambda_q = \frac{\theta(1-\mu)^2\mu}{(\alpha-\mu)\big(r+\mu(1-\mu)\big)}, \quad \lambda_x = \frac{\theta(1-\mu)(1-\alpha)\alpha}{(\mu-\alpha)\big(r+\mu(1-\alpha)\big)} \, . \tag{34}$$

Доказательство: Приложение Б.

Относительная разность норм полезности запаса и дисконта $\tilde{\delta}_t$ в выражении (33) является линейной комбинацией отложенного и текущего избыточного предложения. Коэффициенты λ_q и λ_x имеет противоположные знаки, то есть влияние этих величин на норму полезности запаса в какой-то мере взаимно погашается.

Комбинируя решение для $\tilde{\delta}_t$ с уравнением для цены товара (32) и преобразуя (см. Приложение Б), получаем решение для равновесной цены:

$$lnp_t = \eta_q lnq_t + \eta_x lnx_t \, , \tag{35}$$

где

$$\eta_q = \lambda_q \frac{r}{1-\mu}, \quad \eta_x = \lambda_x \frac{r}{1-\alpha} \, . \tag{36}$$

Коэффициенты линейной комбинации в решении для цены (35) пропорциональны соответствующим коэффициентам для нормы полезности (33).

6.1 Два крайних случая

Рассмотрим решение для цены товара (35) для двух крайних случаев. В первом склонность к хранению запасов равна нулю, $\mu = 0$, что имеет место при нулевом весе запасов в полезности потребителей, $b = 0$. Тогда из (34) и (36) имеем: $\eta_q = 0$, $\eta_x = -\theta$, и уравнение цены (35) сводится к авторегрессии:

$$lnp_t = -\theta lnx_t = -\theta(\alpha lnx_{t-1} + \varepsilon_t) = \alpha lnp_{t-1} - \theta\varepsilon_t \ . \tag{37}$$

Отсюда следует, что при отсутствии запасов автокорреляция цены полностью определяется автокорреляцией процесса предложения, которая выражается коэффициентом α.

Во втором случае процесс предложения не коррелирован во времени, то есть $\alpha = 0$. Тогда $\eta_x = 0$ и

$$\eta_q = -\frac{\theta r(1-\mu)}{r + \mu(1-\mu)} \ . \tag{38}$$

Уравнение цены (35) принимает вид авторегрессии с коэффициентом μ:

$$lnp_t = \eta_q lnq_t = \eta_q(\mu lnq_{t-1} + \varepsilon_t) = \mu lnp_{t-1} + \eta_q\varepsilon_t \ . \tag{39}$$

Данный случай иллюстрирует вклад управления запасами в автокорреляцию цены, а также стабилизирующий эффект запасов. Автокорреляция цены определяется коэффициентом склонности к хранению μ, хотя процесс предложения не коррелирован во времени. Из (39) следует, что условная дисперсия логарифма цены равна

$$Var_{t-1} lnp_t = Var_{t-1}\eta_q\varepsilon_t = \eta_q^2\sigma^2 \ , \tag{40}$$

Нетрудно убедиться, используя (38), что $\eta_q^2 < \theta^2$ при $\alpha = 0$, а значит эта дисперсия меньше условной дисперсии цены при $\mu = 0$, т. е. в отсутствии запасов (как видно из (37), $Var_{t-1} lnp_t = \theta^2\sigma^2$). Снижение дисперсии цены обусловлено стабилизирующим эффектом управления запасами.

6.2 Автокорреляция первого порядка для цены товара

В общем случае вклад управления запасами в автокорреляцию товарных цен можно оценить из сравнения коэффициента автокорреляции для цен в моделях с запасами и без них. Как было показано, в последнем случае этот коэффициент равен α, а в общем случае он определяется как отношение: $\rho = Cov(lnp_t, lnp_{t-1})/Var(lnp_t)$. Дисперсия и ковариация для равновесной цены (35) вычисляются в виде:

$$Var(lnp_t) = \frac{\eta_q^2}{1-\mu^2} + \frac{2\eta_q\eta_x}{1-\alpha\mu} + \frac{\eta_x^2}{1-\alpha^2} \quad (41)$$

$$Cov(lnp_t, lnp_{t-1}) = \frac{\mu\eta_q^2}{1-\mu^2} + \frac{(\alpha+\mu)\eta_q\eta_x}{1-\alpha\mu} + \frac{\alpha\eta_x^2}{1-\alpha^2} \quad (42)$$

На рис. 2 показаны зависимости коэффициента автокорреляции цены ρ от коэффициента автокорреляции предложения α для различных значений склонности к хранению $\mu = 0,\ 0.2,\ 0.4,\ 0.6,\ 0.8$ при норме дисконта $r = 0.1$. Горизонтальная ось показывает коэффициент α в интервале $(0{,}1)$, а вертикальная – величину ρ в том же интервале. Диагональная линия соответствует автокорреляции цены для $\mu = 0$.

Рис. 2: Автокорреляция цены ρ как функция α для различных значений μ

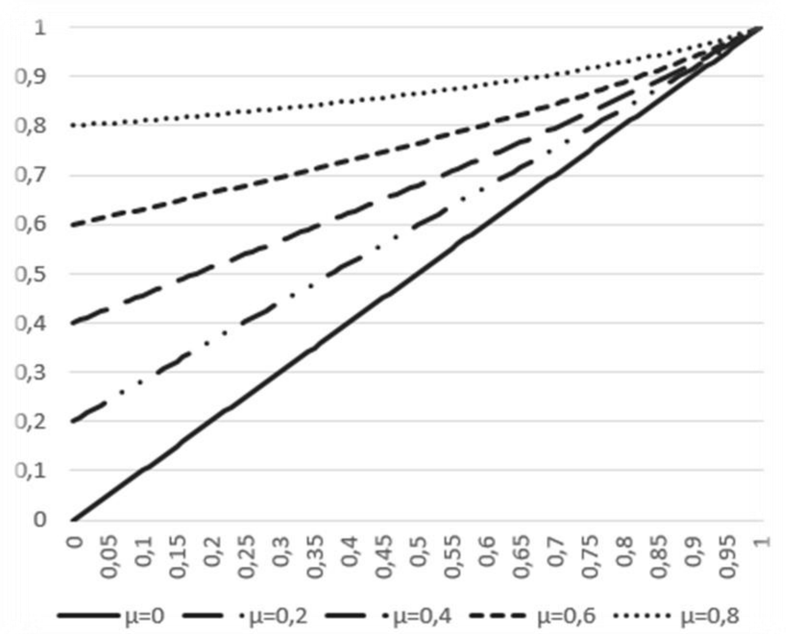


Рис. 2 демонстрирует, что вклад управления запасами в автокорреляцию цены может быть значительным. Этот вклад уменьшается с увеличением автокорреляции предложения и повышается с увеличением склонности к хранению. Похожая диаграмма была построена в работе (Deaton & Laroque, 1996, p. 915) для модели спекулятивного поведения на сырьевом рынке, в которой не учитывается полезность хранения запаса.

Заметим, что функции, изображенные на рис. 2, не зависят от параметра θ, потому что он исчезает из выражения для ρ как отношения (42) к (41). Эти функции слабо зависят от нормы дисконта r. Параметры θ и r влияют на склонность к хранению μ, которая рассматривается на рис. 2 в качестве параметра модели. Ниже в другом числовом примере будет рассмотрена явная зависимость μ от θ и r.

6.3 Векторная авторегрессия

Решение для нормы полезности запаса (33) и товарной цены (35) в общем случае можно представить в форме векторной авторегрессии.

Утверждение 3. (i) Динамические уравнения для товарной цены, нормы полезности запаса и предложения товара имеют вид:

$$\Delta lnp_t = r - \delta_{t-1} + \left(\eta_q + \eta_x\right)\varepsilon_t \tag{43}$$

$$\Delta\delta_t = (1-\mu)(r-\delta_{t-1}) + r(\alpha-\mu)\lambda_x lnx_{t-1} + r\left(\lambda_q + \lambda_x\right)\varepsilon_t \tag{44}$$

$$\Delta lnx_t = (\alpha - 1)lnx_{t-1} + \varepsilon_t \tag{45}$$

(ii) Коэффициент при случайном слагаемом в уравнении для цены (43) равен:

$$\eta_q + \eta_x = -\frac{\theta(1-\mu)(r+\mu)}{\left(r+\mu(1-\mu)\right)\left(r+\mu(1-\alpha)\right)} < 0 \tag{46}$$

Доказательство: Приложение B.

Векторная авторегрессия включает уравнения для цены (43) и нормы полезности запаса (44), а также для процесса предложения (45), воспроизводящее (4). Поскольку $\eta_q + \eta_x < 0$, случайное слагаемое в уравнении цены (43) влияет на цену однозначным образом: отрицательный шок предложения вызывает увеличение цены, а положительный – снижение. Уравнение для нормы полезности запаса (44) определяет ее изменение как сумму трех слагаемых, отражающих эффект возвращения к среднему, влияние предложения прошлого периода и шок предложения в текущем периоде. Эффект возвращения к среднему слабый при высокой склонности к хранению μ, отражающей инерционность динамики запасов. Влияние предложения lnx_{t-1} на $\Delta\delta_t$ в уравнении (44) является отрицательным, поскольку

$$r(\alpha-\mu)\lambda_x = -\frac{r\theta(1-\mu)(1-\alpha)\alpha}{\left(r+\mu(1-\alpha)\right)} < 0 \qquad (47)$$

Например, значительное избыточное предложение предшествующего периода влечет снижение δ_t. Это происходит благодаря накоплению запаса, которое вызывает уменьшение его относительной ценности.

Эффект шока предложения ε_t на $\Delta\delta_t$ в уравнении (44) зависит от знака коэффициента $r\left(\lambda_q+\lambda_x\right)$, который может быть любым:

$$r\left(\lambda_q+\lambda_x\right) = \frac{r\theta(1-\mu)}{\alpha-\mu}\left(\frac{(1-\mu)\mu}{r+(1-\mu)\mu} - \frac{(1-\alpha)\alpha}{r+(1-\alpha)\mu}\right) \lesseqgtr 0 \qquad (48)$$

Если коэффициент автокорреляции α достаточно мал, то $r\left(\lambda_q+\lambda_x\right) < 0$, то есть шок действует на норму полезности запаса в том же направлении, что и на цену товара. В противном случае знак $r\left(\lambda_q+\lambda_x\right)$ может быть положительным, что будет продемонстрировано ниже.

7. Стабилизирующие и дестабилизирующие эффекты на ценовую динамику

Изменение нормы полезности в ответ на шок предложения отражает стабилизирующий либо дестабилизирующий эффект управления запасами на цену товара. Чтобы показать это, перепишем уравнение цены (16) следующим образом:

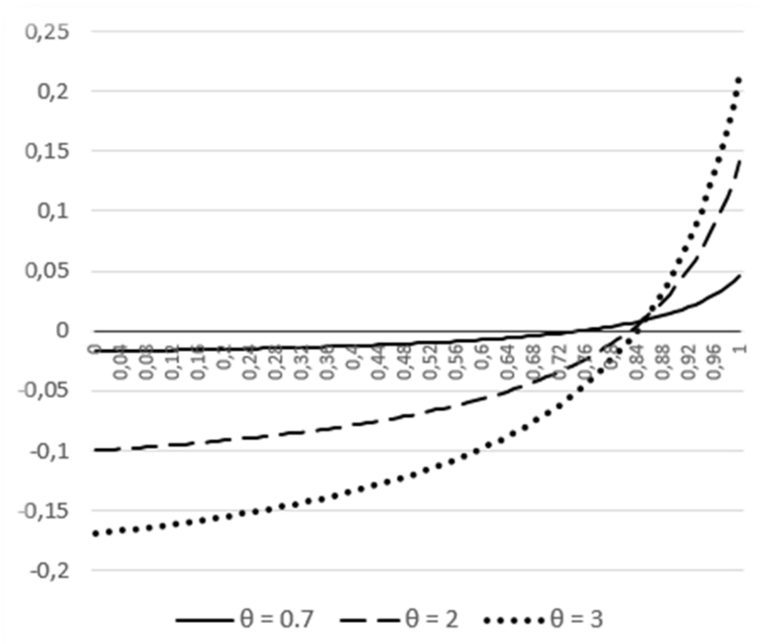
$$\delta_t = r + lnp_t - E_t lnp_{t+1} \qquad (49)$$

Предположим, что в периоде t происходит значительный отрицательный шок предложения $\varepsilon_t < 0$, который дает увеличение текущей цены lnp_t и ожидания цены в следующем периоде $E_t lnp_{t+1}$. Если эффект на текущую цену является доминирующим, то из (49) следует, что норма полезности увеличивается, то есть движется сонаправлено с текущей ценой. Если, напротив, эффект на ценовое ожидание доминирует, то норма полезности уменьшается и движется в противоположном направлении к текущей цене. В первом случае управление запасами оказывает стабилизирующий эффект на ценовую динамику, а во втором – дестабилизирующий.

Характер эффекта шока предложения на δ_t зависит от знака коэффициента $r(\lambda_q + \lambda_x)$ в уравнении (44). Если $\lambda_q + \lambda_x < 0$, то шок $\varepsilon_t < 0$ действует в сторону повышения как на цену товара, что следует из уравнения (43), так и на норму полезности запаса. Если этот шок значительный по абсолютной величине, то из уравнения (44) имеем $\Delta\delta_t > 0$, и изменение запасов является стабилизирующим. В противном случае, если $\lambda_q + \lambda_x > 0$, отрицательный шок предложения действует на цену в сторону повышения, а на норму полезности в сторону понижения. Если шок значительный по абсолютной величине, то $\Delta\delta_t < 0$, и изменение запаса является дестабилизирующим, поскольку при этом ценовое ожидание увеличивается больше чем текущая цена. Уменьшение нормы полезности, то есть относительной ценности запаса означает, согласно условию (13), что запас сокращается в меньшей степени чем потребление.

Для иллюстрации этих рассуждений рассмотрим числовой пример. Пусть $r = 0.1$, $b = 0.2$ и обратная эластичность спроса равна $\theta = 0.7,\ 2,\ 3$. Параметр склонности к хранению, соответствующий этим значениям принимает значения $\mu = 0.73,\ 0.59,\ 0.56$, соответственно. Рис. 3 показывает зависимости коэффициента при шоке предложения $r(\lambda_q + \lambda_x)$ в уравнении (44) от коэффициента автокорреляции предложения α.

Рис. 3: Коэффициент $r(\lambda_q + \lambda_x)$ как функция α



Из этого рисунка можно видеть, что коэффициент $r(\lambda_q + \lambda_x)$ является положительным при высоких значениях α и отрицательным при относительно низких значениях. В первом случае, значительный шок предложения может иметь дестабилизирующее влияние на цену товара благодаря тому, что его эффект на ценовое ожидание доминирует над эффектом на текущую цену, согласно уравнению (49). Эффект на ожидания для отрицательного шока в периоде t, $\varepsilon_t < 0$, оказывается более сильным при высоких значениях α, потому что этот шок индуцирует последовательность отрицательных инкрементов избыточного предложения $\alpha^\tau \varepsilon_t$ в последующие периоды $t + \tau$, что отражается в ценовом ожидании периода t. Таким образом, эффект на ожидания оказывается доминирующим из-за высокой автокорреляции процесса предложения.

Дестабилизирующий эффект на товарную цену может быть усилен в ситуации перелома тренда. Предположим, что в периоде t имеет место значительный отрицательный шок предложения, $\varepsilon_t < 0$, и это происходит после серии шоков с преобладающими положительными значениями, такими что $ln x_{t-1} > 0$. Положительный тренд предложения в предыдущие периоды оказывал давление вниз на цену товара и вверх на норму полезности запаса (что следует из уравнений (43) и (44), поскольку $\eta_q + \eta_x < 0$ и $r(\lambda_q + \lambda_x) > 0$ при высоком значении α). Допустим, что по этой причине норма полезности в периоде $t - 1$ была выше долговременного среднего, $\delta_{t-1} > r$. В такой ситуации, эффект снижения нормы полезности $\Delta\delta_t$ из-за отрицательного шока предложения в периоде t дополняется двумя отрицательными эффектами: возвращения к среднему и влияния избыточного предложения прошлых периодов (поскольку первое и второе слагаемые в правой части уравнения (44) являются отрицательными, так как $\delta_{t-1} > r$ и $r(\alpha - \mu)\lambda_x < 0$ согласно (47)). При смене положительного тренда в периоде t эти два эффекта усиливают давление вниз на норму полезности запаса.

Описанный механизм ценовой дестабилизации отражает реальные ситуации перелома тренда в движении сырьевых цен, которые важны для спекулятивной торговли активами. Например, понижательный ценовой тренд может быть прерван в результате шокового события, вызвавшего резкое увеличение цены. Ожидания дальнейшего роста цены возникают в том случае, когда данное событие влечет за собой негативные последствия на стороне предложения. Такие ожидания могут приводить к наращиванию запасов вместо сокращения, которое должно было бы происходить в случае стабилизирующего цены управления запасами.

8. Заключение

На основе теоретической модели сырьевого рынка было показано, каким образом торговля с использованием запасов может усиливать ценовую волатильность. Это происходит двояким путем: через увеличение автокорреляции товарной цены и через реакцию нормы полезности запаса на шоковые возмущения на стороне предложения. Решение для управления запасами было представлено в виде линейной комбинации двух случайных переменных: текущего и отложенного избыточного предложения. Последняя является ненаблюдаемой величиной, однако, как было показано, равновесная динамика сырьевого рынка описывается векторной авторегрессией из трех наблюдаемых переменных: цены товара, нормы полезности запаса, идентифицируемой через спот-фьючерсный спрэд, и текущего предложения. Уравнения полученной векторной авторегрессии близки по своей структуре к упомянутой во введении эмпирической модели Гибсона и Шварца для сырьевой цены и нормы полезности запаса.

Реальные примеры управления запасами, дестабилизирующего цены, отмечались в эмпирических исследованиях мирового рынка нефти. В частности, Лутц Киллиан и Дэниел Мерфи (Killian & Murphy, 2014) показали, что такое поведение играло важную роль в эпизодах ценовых скачков из-за начала Ирано-Иракской войны в 1980 г., войны в Персидском заливе в 1990–1991, Венесуэльского кризиса и войны в Ираке в 2002–2003. Во всех этих случаях отрицательный шок предложения непосредственно вызывал снижение запасов нефти. Однако увеличение спекулятивного спроса на нефть, мотивированного ожиданиями дальнейших негативных событий на стороне предложения, приводило к наращиванию запасов. В результате взаимного наложения данных эффектов запасы менялись незначительно, несмотря на резкие скачки цены на нефть.

В подобных эпизодах на первый план выходил спекулятивный мотив поведения участников рынка, формализованный в рассмотренной здесь модели. Как было показано, дестабилизирующее рынок управление запасами может происходить, когда шок предложения является значительным по абсолютной величине и оказывает существенный эффект последействия благодаря высокой автокорреляции предложения. В таких ситуациях ценовые ожидания играют доминирующую роль, а изменения запасов усугубляют эффект шока предложения на цену товара.

Список литературы

Brennan M (1958) The supply of storage. The American Economic Review 48(1):50−72

Deaton A, Laroque G (1996) competitive Storage and Commodity Price Dynamic, journal of Political Economy, 104(5): 896-923

Gibson R, Schwartz E (1989) Valuation of long-term oil-linked assets, Anderson Graduate School of Management, UCLA, Working Paper, #6-89

Gibson R, Schwartz E (1990) Stochastic convenience yield and the pricing of oil contingent claims. The Journal of Finance 45(3): 959−976

Kaldor N (1939) Speculation and economic stability. The Review of Economic Studies 7: 1−27

Killian L, Murphy D (2014) The role of inventories and speculative trading in the global market for crude oil. Journal of Applied Econometrics 29:454−478

Lautier D (2009) Convenience yield and commodity markets. *Les Cahiers de la Chaire* 22, Chaire Finance & Development Durable, p 16

Litzenberger R, Rabinowitz N (1995) Backwardation in oil futures markets: theory and empirical evidence. The Journal of Finance 50(4): 1517−1545

Pindyck R (1994) Inventories and the short-run dynamic of commodity prices.: The RAND Journal of Economics 25(1):141−159

Pindyck R (2001) The dynamics of commodity spot and futures markets: a premier. The Energy Journal 22(3):1−29

Pindyck R (2004) Volatility and commodity price dynamics. The Journal of Futures Markets 24(12):1029−1047

Schwartz E (1997) The stochastic behaviour of commodity prices: implications for valuation and hedging. The Journal of Finance 52(3): Papers and Proceedings Fifty-Seventh Annual Meeting, American Finance Association, p 923−973

Smith J (2009) World oil: market or mayhem. Journal of Economic Perspectives 23:145−164

Williams J (1986) The economic function of futures markets. Cambridge University Press, New York, p 258

Williams J, Wright B (1991) Storage and commodity markets. Cambridge University Press, Cambridge, p 502

Приложение

А. Утверждение 1. Решение для переменных s_t, y_t находится через линейное приближение уравнений (20), (21) около точки стационарного равновесия: $s^* = (b/r)^{1/\theta}$, $x^* = 1$. Рассмотрим отношение запасов к потреблению согласно (18): $s_t/y_t = (b/\delta_t)^{1/\theta}$. Линейное приближение для $\delta^* = r$ дает:

$$(b/\delta_t)^{1/\theta} = s^*(r/\delta_t)^{1/\theta} \approx s^*(1 - (\delta_t - r)/\theta r) \; ,$$

откуда следует:

$$ln(s_t/s^*) - lny_t \approx -(\delta_t - r)/\theta r \; . \tag{A1}$$

Покажем, что решение для $s_t = \mu_t a_t$, удовлетворяющее этому условию, имеет вид:

$$s_t = s_t^a + \mu_r'(\delta_t - r)a^* = s_t^a + \mu_r'(\delta_t - r)\big(1 + (b/r)^{1/\theta}\big) \; , \tag{A2}$$

где $a^* = x^* + s^* = 1 + (b/r)^{1/\theta}$ – стационарный располагаемый ресурс,

$$s_t^a = \mu(x_t + s_{t-1}^a) = \mu \sum_{\tau=0}^{\infty} \mu^\tau x_{t-\tau} \tag{$A3$}$$

объем запасов, определенный эффектом накопления; $\mu_r' = -\,b^{1/\theta} r^{1/\theta - 1}/\theta\big(b^{1/\theta} + r^{1/\theta}\big)^2$ – производная μ по r. Подставляя ее в (A2), имеем

$$s_t = s_t^a - \frac{b^{1/\theta}\big(1 + (b/r)^{1/\theta}\big) r^{1/\theta - 1}}{\theta(b^{1/\theta} + r^{1/\theta})^2}(\delta_t - r) = s_t^a - (\mu/\theta r)(\delta_t - r) \; . \tag{$A4$}$$

Линейное приближение для процесса предложения (4) имеет вид:

$$x_t = \alpha x_{t-1} + (1 - \alpha) + \varepsilon_t \; .$$

Итерируя, получаем:

$$x_t = \sum_{\tau=0}^{\infty} \alpha^\tau \varepsilon_{t-\tau} + (1 - \alpha)\sum_{\tau=0}^{\infty} \alpha^\tau = 1 + \sum_{\tau=0}^{\infty} \alpha^\tau \varepsilon_{t-\tau}$$

Подставляя это в (A3), имеем:

$$s_t^a = \sum_{\tau=0}^{\infty} \mu^{\tau+1} \left(1 + \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \varepsilon_{t-\tau-j} \right) = \frac{\mu}{1-\mu} + \sum_{\tau=0}^{\infty} \mu^{\tau+1} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \varepsilon_{t-\tau-j} \ . \qquad (A5)$$

Предположим что $\alpha > \mu$ и преобразуем двойную сумму, учитывая (22) и (25):

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} \mu^{\tau+1} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \varepsilon_{t-\tau-j} = \mu \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \varepsilon_{t-j} + \mu^2 \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \varepsilon_{t-1-j} + \cdots$$

$$= \mu(\varepsilon_t + (\mu + \alpha)\varepsilon_{t-1} + (\mu^2 + \mu\alpha + \alpha^2)\varepsilon_{t-2} \ldots)$$

$$= \mu\big(\varepsilon_t + \big((\mu/\alpha) + 1\big)\alpha\varepsilon_{t-1} + ((\mu/\alpha)^2 + (\mu/\alpha) + 1)\alpha^2\varepsilon_{t-2} \ldots\big)$$

$$= \mu \sum_{\tau=0}^{\infty} \alpha^\tau \varepsilon_{t-\tau} \sum_{j=0}^{\tau} (\mu/\alpha)^j$$

$$= \mu \sum_{\tau=0}^{\infty} \alpha^\tau \frac{1-(\mu/\alpha)^{\tau+1}}{1-\mu/\alpha} \varepsilon_{t-\tau} = \frac{\mu}{\alpha-\mu} \sum_{\tau=0}^{\infty} \alpha^{\tau+1}(1-(\mu/\alpha)^{\tau+1})\varepsilon_{t-\tau}$$

$$= \frac{\mu}{\alpha-\mu} \left(\alpha \sum_{\tau=0}^{\infty} \alpha^\tau \varepsilon_{t-\tau} - \mu \sum_{\tau=0}^{\infty} \mu^\tau \varepsilon_{t-\tau} \right) = \frac{\mu}{\alpha-\mu} \ (\alpha lnx_t - \mu lnq_t) \ .$$

Подставляя это в (А5), а затем в (А4) получаем решение для s_t:

$$s_t = s_t^a - \left(\frac{\mu}{\theta r}\right)(\delta_t - r) = s^* + \mu \frac{\mu lnq_t - \alpha lnx_t}{\mu - \alpha} - \left(\frac{\mu}{\theta r}\right)(\delta_t - r) \ ,$$

поскольку $\mu/(1-\mu) = (b/r)^{1/\theta} = s^*$. Можно показать, что эта формула верна для $\alpha < \mu$.

Решение для y_t получается аналогичным образом:

$$y_t = 1 + (1-\mu)\frac{\mu lnq_t - \alpha lnx_t}{\mu - \alpha} + \ (\mu/\theta r)(\delta_t - r)$$

Найденное решение для s_t и y_t удовлетворяет условию (А1):

$$ln(s_t/s^*) - lny_t \approx s_t/s^* - y_t = \ -\big((1-\mu)/\theta r\big)(\delta_t - r) - \ (\mu/\theta r)(\delta_t - r) = -(\delta_t - r)/\theta r.$$

Б. Утверждение 2. Запишем уравнение для темпа роста цены (16) в виде

$$E_t \Delta lnp_{t+1} = -r\tilde{\delta}_t \ . \qquad (А6)$$

Используя уравнение для цены равновесия (32), имеем:

$$E_t \Delta lnp_{t+1} = \theta(1-\mu)\frac{\mu E_t \Delta lnq_{t+1} - \alpha E_t \Delta lnx_{t+1}}{\alpha - \mu} - \mu E_t \Delta\tilde{\delta}_{t+1} \ . \qquad (A7)$$

Из (4) и (24) получаем:

$$E_t \Delta lnq_{t+1} = (\mu - 1) lnq_t, \;\; E_t \Delta lnx_{t+1} = (\alpha - 1) lnx_t \, . \tag{A8}$$

Рассмотрим решение для нормы полезности запаса в виде линейной функции $\tilde{\delta}_t = \lambda_q lnq_t + \lambda_x lnx_t$, где λ_q и λ_x – неизвестные параметры. С учетом (A8):

$$E_t \Delta \tilde{\delta}_{t+1} = \lambda_q E_t \Delta lnq_{t+1} + \lambda_x E_t \Delta lnx_{t+1} = \lambda_q (\mu - 1) lnq_t + \lambda_x (\alpha - 1) lnx_t \, . \tag{A9}$$

Подставляя (A7), (A8), (A9) и (33) в (A6) получаем:

$$E_t \Delta lnp_{t+1} = \theta(1-\mu) \frac{\mu(\mu-1) lnq_t - \alpha(\alpha-1) lnx_t}{\alpha - \mu} - \mu\big(\lambda_q(\mu-1) lnq_t + \lambda_x(\alpha-1) lnx_t\big)$$
$$= -r\big(\lambda_q lnq_t + \lambda_x lnx_t\big) \, .$$

Группируя члены с lnq_t и lnx_t в последнем равенстве, получаем уравнения для параметров λ_q и λ_x, соответственно:

$$\theta(1-\mu) \frac{\mu(\mu-1) lnq_t}{\alpha - \mu} - \mu\lambda_q(\mu-1) lnq_t = -r\lambda_q lnq_t \, ,$$

$$\theta(1-\mu) \frac{\alpha(\alpha-1) lnx_t}{\mu - \alpha} - \mu\lambda_x(\alpha-1) lnx_t = -r\lambda_x lnx_t \, ,$$

откуда следует:

$$\lambda_q = \frac{\theta(1-\mu)^2\mu}{(\alpha-\mu)\big(r + \mu(1-\mu)\big)}, \;\; \lambda_x = \frac{\theta(1-\mu)(1-\alpha)\alpha}{(\mu-\alpha)\big(r+\mu(1-\alpha)\big)} \, .$$

Уравнение (35). Подставляя $\tilde{\delta}_t = \lambda_q lnq_t + \lambda_x lnx_t$ в уравнение для цены (32):

$$lnp_t = \theta(1-\mu) \frac{\mu lnq_t - \alpha lnx_t}{\alpha - \mu} - \mu\big(\lambda_q lnq_t + \lambda_x lnx_t\big)$$
$$= \left(\frac{\theta(1-\mu)\mu}{\alpha-\mu} - \mu\lambda_q\right) lnq_t + \left(\frac{\theta(1-\mu)\alpha}{\mu-\alpha} - \mu\lambda_x\right) lnx_t \, ,$$

получаем:

$$\eta_q = \frac{\theta(1-\mu)\mu}{\alpha-\mu} - \mu\lambda_q = \frac{\theta(1-\mu)\mu}{\alpha-\mu}\left(1 - \frac{(1-\mu)\mu}{r+\mu(1-\mu)}\right) = \frac{r\theta(1-\mu)\mu}{(\alpha-\mu)\big(r+\mu(1-\mu)\big)}$$
$$= \lambda_q \frac{r}{1-\mu} \, ,$$

$$\eta_x = \frac{\theta(1-\mu)\alpha}{\mu-\alpha} - \mu\lambda_x = \frac{\theta(1-\mu)\alpha}{\mu-\alpha}\left(1 - \frac{(1-\alpha)\mu}{r+\mu(1-\alpha)}\right) = \frac{r\theta(1-\mu)\mu}{(\mu-\alpha)\big(r+\mu(1-\alpha)\big)} =$$

$$= \lambda_x \frac{r}{1-\alpha}.$$

B. Утверждение 3 (i). Из уравнений (35), (A.7) и (16) получаем:

$$\Delta lnp_t = \eta_q \Delta lnq_t + \eta_x \Delta lnx_t = \eta_q(\mu-1)lnq_t + \eta_x(\alpha-1)lnx_t + \big(\eta_q+\eta_x\big)\varepsilon_t = E_{t-1}\Delta lnp_t + \big(\eta_q+\eta_x\big)\varepsilon_t = r - \delta_{t-1} + \big(\eta_q+\eta_x\big)\varepsilon_t \,.$$

Из (33), (4), (24) получаем:

$$\tilde{\delta}_t = \lambda_q lnq_t + \lambda_x lnx_t = \lambda_q \mu lnq_{t-1} + \lambda_x \alpha lnx_{t-1} + \big(\lambda_q+\lambda_x\big)\varepsilon_t = \mu\big(\lambda_q lnq_{t-1} + \lambda_x lnx_{t-1}\big) + (\alpha-\mu)\lambda_x lnx_{t-1} + \big(\lambda_q+\lambda_x\big)\varepsilon_t = \mu\tilde{\delta}_{t-1} + (\alpha-\mu)\lambda_x lnx_{t-1} + \big(\lambda_q+\lambda_x\big)\varepsilon_t \,.$$

Следовательно,

$$\Delta\delta_t = r(1-\mu) - (1-\mu)\delta_t + r(\alpha-\mu)\lambda_x lnx_{t-1} + r\big(\lambda_q+\lambda_x\big)\varepsilon_t = (1-\mu)(r-\delta_t) + r(\alpha-\mu)\lambda_x lnx_{t-1} + r\big(\lambda_q+\lambda_x\big)\varepsilon_t \,.$$

(ii). $\eta_q + \eta_x =$

$$= \lambda_q \frac{r}{1-\mu} + \lambda_x \frac{r}{1-\alpha} = \frac{r\theta(1-\mu)\mu}{(\alpha-\mu)\big(r+\mu(1-\mu)\big)} + \frac{r\theta(1-\mu)\alpha}{(\mu-\alpha)\big(r+\mu(1-\alpha)\big)}$$

$$= \frac{r\theta(1-\mu)}{(\alpha-\mu)}\left(\frac{\mu}{r+\mu(1-\mu)} - \frac{\alpha}{r+\mu(1-\alpha)}\right)$$

$$= \frac{r\theta(1-\mu)}{(\alpha-\mu)} \cdot \frac{r(\mu-\alpha) + \mu\big(\mu(1-\alpha) - \alpha(1-\mu)\big)}{\big(r+\mu(1-\mu)\big)\big(r+\mu(1-\alpha)\big)}$$

$$= \frac{r\theta(1-\mu)}{(\alpha-\mu)} \cdot \frac{r(\mu-\alpha) + \mu(\mu-\alpha)}{\big(r+\mu(1-\mu)\big)\big(r+\mu(1-\alpha)\big)}$$

$$= -\frac{r\theta(1-\mu)(r+\mu)}{\big(r+\mu(1-\mu)\big)\big(r+\mu(1-\alpha)\big)} < 0 \,.$$